

FERDINAND P. BEER
E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
PHILLIP J. CORNWELL
BRIAN P. SELF

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

DINÁMICA

A full-page background image showing a female athlete from behind, in mid-stride during a run. She is wearing a blue sports top and bright yellow-green shorts. Her right leg is a prosthetic running blade, which is dark grey and curved. The background is a clear blue sky with scattered white clouds. The word 'DINÁMICA' is overlaid in large, bold, yellow-green letters with a white outline.

13ª edición

Mc
Graw
Hill

Mecánica vectorial para ingenieros

Dinámica

Decimotercera edición

Ferdinand P. Beer

Ex catedrático de la Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.

Ex catedrático de la University of Connecticut

Phillip J. Cornwell

Academia de la Fuerza Aérea de EEUU

Brian P. Self

Universidad Politécnica Estatal de California, San Luis Obispo

cipio de equivalencia de fuerzas externas y términos inerciales se aplica de manera directa al análisis de movimiento plano, lo que facilita la transición al estudio del movimiento tridimensional.

Los principios fundamentales se utilizan en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido en este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, se consideran primero las aplicaciones más simples. Por ejemplo:

- La cinemática de partículas (capítulo 11) antecede a la cinemática de los cuerpos rígidos (capítulo 15).
- Los principios fundamentales de la cinética de cuerpos rígidos se aplican primero a la solución de problemas bidimensionales (capítulos 16 y 17), los cuales pueden ser visualizados con mayor facilidad por los estudiantes, mientras que los problemas tridimensionales se posponen hasta el capítulo 18.

La presentación de los principios de la cinética se unifica. Esta reciente edición de *Mecánica vectorial para ingenieros* conserva la presentación unificada de los principios de la cinética que caracterizaron a las doce ediciones anteriores. Los conceptos de cantidad de movimiento lineal y angular se presentan en el capítulo 12, de modo que la segunda ley de Newton para el movimiento pueda presentarse no sólo en su forma convencional $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, sino también como una ley que relaciona, respectivamente, la suma de fuerzas que actúan sobre una partícula y la suma de sus momentos con las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y angular de la partícula. Esto hace posible una introducción temprana del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, y un análisis más lógico del movimiento de una partícula bajo una fuerza central (sección 12.3A). Aún más importante, este planteamiento puede extenderse sin dificultad al movimiento de un sistema de partículas (capítulo 14) y efectuar un tratamiento más conciso y unificado de la cinética de cuerpos rígidos en dos y tres dimensiones (capítulos 16 a 18).

Enfoque sistemático de resolución de problemas. Como novedad en esta edición del texto, todos los problemas de ejemplo se resuelven usando los pasos de Estrategia, Modelar, Analizar, Revisar y Pensar, o enfoque “EMARP”. La intención de esta metodología es dar confianza a los estudiantes para resolver problemas nuevos y alentarlos a aplicar este enfoque en todos los problemas que se les asignen.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introdujeron al principio del libro de Estática, y su importancia se enfatizó a lo largo de todo el texto. Estos diagramas se emplean no solo para resolver problemas de equilibrio, sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. En dinámica se introduce el diagrama cinético, que es una representación gráfica de los términos de inercia. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en el diagrama de cuerpo libre y en el diagrama cinético, en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido a la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica. Por tanto, en la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

17.1 MÉTODOS DE LA ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

El principio del trabajo y la energía se utilizará ahora para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se señaló en el capítulo 13, este método en particular se adapta bien a la solución de problemas en los que intervienen velocidades y desplazamientos. Su ventaja principal radica en el hecho de que el trabajo de fuerzas y la energía cinética de partículas son cantidades escalares.

17.1A Principio del trabajo y la energía

Para aplicar el principio del trabajo y la energía al movimiento de un cuerpo rígido, se supondrá otra vez que el cuerpo rígido está compuesto por un gran número de partículas de masa Δm . Si se recurre a la ecuación (14.30) de la sección 14.2B, se tiene

Principio del trabajo y la energía, cuerpo rígido

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T_1, T_2 = valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman al cuerpo rígido
 $U_{1 \rightarrow 2}$ = trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo

Al igual que se hizo en el capítulo 13, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas se puede expresar como $U_{1 \rightarrow 2}^{nc}$ y se pueden definir los términos de la energía potencial para las fuerzas conservativas. Entonces, la ecuación (17.1) se puede expresar como

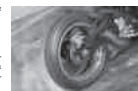
$$T_1 + V_1 + U_{1 \rightarrow 2}^{nc} = T_2 + V_2 + U_{1 \rightarrow 2}^{nc} \quad (17.1')$$

donde V_1 y V_2 son la energía gravitacional potencial inicial y final del centro de masa del cuerpo rígido con respecto a un punto de referencia, y V_1 y V_2 son los valores inicial y final de la energía elástica asociada con los resortes en el sistema. Se obtiene la energía cinética total

$$T = \frac{1}{2} \sum \Delta m v_i^2 \quad (17.2)$$

al sumar cantidades escalares positivas, y ella misma es una cantidad escalar positiva. Después se verá cómo puede determinarse T para diversos tipos de movimiento de un cuerpo rígido.

La expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en la ecuación (17.1) representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo, ya sea que estas fuerzas sean internas o externas. Sin embargo, el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un cuerpo rígido es cero. Considere dos partículas A y B de un cuerpo rígido y las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que se ejercen entre sí (figura 17.1). Mientras que, en general, los pequeños desplazamientos $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, los componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra forma, las partículas no permanecerían a la misma distancia una de otra y el cuerpo no sería rígido. Por tanto, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero. Así, el trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero, y la expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en la ecuación (17.1) se reduce al trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo durante el desplazamiento considerado.



Fotografía 17.1 El trabajo realizado por la fricción reduce la energía cinética del neumático. Crédito: McGraw-Hill Education/Steve Piro.

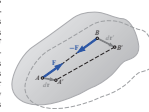


Figura 17.1 El trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero.

Problema modelo 3.10

Tres cables están unidos a una manguera, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente de fuerzas en A .

ESTRATEGIA: Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Luego, se suman las fuerzas y momentos.

MODELAR Y ANALIZAR: Observe que $F_2 = (700 \text{ N})_{AC}$ donde

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} - 50\mathbf{k}}{175}$$

Si se utilizan metros y newtons, la posición y los vectores de fuerza son

$$\mathbf{r}_{AB} = \overrightarrow{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{CA} = \overrightarrow{CA} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{AD} = \overrightarrow{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1.039\mathbf{j}$$

El sistema fuerza-par en A , equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ de $m\text{ g}$ por $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x , y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1.607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k}$$

El cálculo de $\mathbf{M}$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.1F). Por tanto:

$$\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.60\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1.039 & 0 \end{vmatrix} = 103.9\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas se tiene

$$\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (30 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (17.60 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (103.9 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

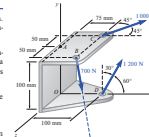


Figura 1 Componentes rectangulares de un sistema equivalente fuerza-par en A .

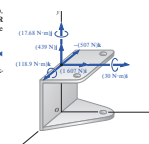


Figura 2 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N}, \quad \mathbf{M} = 1.000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

c) **Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a $\mathbf{R}$, y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}$ (figura 3). Esta igualdad de momentos hace que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{M} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{r} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} = (-1.880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

$$(-600 \text{ N})\mathbf{k} = (-1.880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

Al resolver x se concluye que $x = 3.13 \text{ m}$. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N}, \quad x = 3.13 \text{ m}$$

REVISAR Y PENSAR: Esta reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza equivalente emplea el mismo principio que se utilizará más adelante para calcular centros de gravedad y centros de masa, que son parámetros importantes dentro de la ingeniería mecánica.

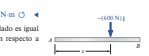


Figura 3 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades del SI y las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos.

Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el Gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de unidades (unidades métricas SI), las unidades del SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuara mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa algo más que aplicar factores de conversión. Como las unidades del SI son consideradas un sistema absoluto basado en unidades de tiempo, longitud y masa, mientras que el sistema de uso común en Estados Unidos es un sistema gravitacional basado en unidades de tiempo, longitud y fuerza, se requieren diferentes enfoques en la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades del SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayoría de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades del sistema inglés, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$). Por tanto, los autores creen que los problemas asignados a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados.

En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de dinámica. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones opcionales se encuentran los métodos gráficos para la resolución de problemas de movimiento rectilíneo, trayectoria de una partícula bajo una fuerza central, desviación de corrientes de fluido, problemas que implican propulsión a chorro y cohetes, la cinemática y la cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, vibraciones mecánicas amortiguadas y analogías eléctricas. Estos temas adquirirán un interés particular cuando el curso de dinámica se imparta durante el primer año de estudios.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría, el cálculo elemental y los conocimientos de álgebra vectorial presentados en los capítulos 2 y 3 del volumen de *Estática*.[†] Sin embargo, se incluyen problemas especiales que requieren un conocimiento más avanzado de cálculo, y ciertas secciones, como las 19.5A y 19.5B sobre vibraciones amortiguadas, solo deben asignarse cuando los estudiantes posean los fundamentos matemáticos adecuados. En las partes del texto que utilizan el cálculo elemental, se pone mayor énfasis en la apropiada comprensión y aplicación de los conceptos de diferenciación e integración, que en la manipulación de las fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

[†] Algunas definiciones y propiedades útiles de álgebra se resumen en el apéndice A al final del libro, para comodidad del lector. Asimismo, las secciones 9.5 y 9.6 del volumen de *Estática*, donde se estudian los movimientos de inercia de masas, se reproducen en el apéndice B.



©Ted Kinsman/Science Source

13

Cinética de partículas: métodos de energía y cantidad de movimiento

Una pelota de golf se deforma después de un impacto, como lo muestra esta fotografía de alta rapidez. La deformación máxima ocurrirá cuando la velocidad de la cabeza del bastón y la velocidad de la pelota sean iguales. En este capítulo se analizarán los impactos utilizando el coeficiente de restitución y la conservación de la cantidad de movimiento lineal. También se examinarán problemas de cinética de partículas mediante el uso del principio del trabajo y la energía.

Introducción

13.1 TRABAJO Y ENERGÍA

13.1A Trabajo de una fuerza

13.1B Principio del trabajo y la energía

13.1C Aplicaciones del principio del trabajo y la energía

13.1D Potencia y eficiencia

13.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

13.2A Energía potencial

*13.2B Fuerzas conservativas

13.2C El principio de conservación de la energía

13.2D Aplicación a la mecánica celeste: movimiento bajo una fuerza central conservativa

13.3 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

13.3A Principio del impulso y la cantidad de movimiento

13.3B Movimiento impulsivo

13.4 IMPACTOS

13.4A Impacto central directo

13.4B Impacto central oblicuo

13.4C Problemas en los que intervienen diversos principios

Objetivos

- **Calcular** el trabajo de una fuerza.
- **Calcular** la energía cinética de una partícula.
- **Calcular** la energía gravitacional y potencial elástica de un sistema.
- **Resolver** problemas de cinética de partículas mediante el principio del trabajo y la energía.
- **Calcular** la potencia y eficiencia de un sistema mecánico.
- **Resolver** problemas de cinética de partículas utilizando la conservación de la energía.
- **Resolver** problemas de cinética de partículas en los que intervienen fuerzas centrales conservativas.
- **Dibujar** diagramas completos y precisos de impulso-cantidad de movimiento.
- **Resolver** problemas de cinética de partículas mediante el principio de impulso y cantidad de movimiento.
- **Resolver** problemas de cinética de partículas utilizando la conservación de la cantidad de movimiento lineal.
- **Resolver** problemas de impacto utilizando el principio del impacto y la cantidad de movimiento y el coeficiente de restitución.
- **Determinar** los principios apropiados que deben aplicarse al resolver un problema de dinámica de partículas.
- **Resolver** problemas de dinámica de varios pasos utilizando diversos principios cinéticos.

Introducción

En el capítulo anterior la mayor parte de los problemas relacionados con el movimiento de partículas se resolvió mediante el uso de la ecuación fundamental del movimiento $F = ma$. Dada una partícula sobre la que se ejerce una fuerza F , se podría resolver esta ecuación para la aceleración a ; luego, aplicando los principios de la cinemática sería posible determinar a partir de a la velocidad y la posición de la partícula en cualquier tiempo.

Sin embargo, el uso de la ecuación $F = ma$ junto con los principios de la cinemática permiten obtener dos métodos de análisis adicionales, el **método del trabajo y la energía** y el **método del impulso y la cantidad de movimiento**. La ventaja de estas ideas radica en el hecho de que hacen que resulte innecesaria la determinación de la aceleración. En realidad, el método del trabajo y la energía relaciona directamente la fuerza, la masa, la velocidad y el desplazamiento, en tanto que el método del impulso y la cantidad de movimiento relaciona la fuerza, la masa, la velocidad y el tiempo.

Primero se considera el método del trabajo y la energía. En la sección 13.1 se definen el *trabajo de una fuerza* y la *energía cinética de una partícula*. Luego, se aplica el principio del trabajo y la energía a la solución de problemas de ingeniería. También se introducen los conceptos de *potencia* y *eficiencia* de una máquina, que son importantes en aplicaciones de ingeniería como motores y actuadores hidráulicos.

La sección 13.2 se dedica al concepto de *energía potencial* de una fuerza conservativa y a la aplicación del principio de conservación de la energía a diversos problemas de interés práctico. En la sección 13.2D, los principios de conservación de la energía y de conservación del momento angular se emplean en forma conjunta para resolver problemas de mecánica celeste.

La segunda parte del capítulo se dedica al principio del impulso y la cantidad de movimiento y a su aplicación en el estudio del movimiento de una partícula. Como

se verá en la sección 13.3B, este principio es en particular eficaz en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, en el cual se aplican fuerzas muy grandes durante un intervalo muy corto, como cuando un martillo golpea un clavo.

También se considera el *impacto central* de dos cuerpos. Se mostrará que existe cierta relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos en colisión antes y después del impacto. Esta relación, junto con el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos, puede utilizarse para resolver varios problemas de interés práctico.

Por último, se abordará cómo seleccionar el mejor principio para resolver un problema dado entre la segunda ley de Newton, trabajo y energía o impulso y cantidad de movimiento. Es posible que sea necesario aplicar diversos principios a fin de resolver algunos problemas de dinámica.

13.1 TRABAJO Y ENERGÍA

Trabajo y energía tienen significados muy específicos para la ciencia y la ingeniería. En la vida cotidiana puede decirse que levantar un bloque de cemento implica mucho trabajo, pero para la ciencia, si el bloque no se mueve, sostenerlo no implica trabajo alguno. De manera similar, se habla todo el tiempo de energía, desde cómo uno se siente un día en particular (“Hoy no tengo mucha energía”) hasta las políticas nacionales e internacionales (“El alto costo de la energía está afectando nuestra balanza comercial con otros países”). Para la ciencia y la ingeniería, el trabajo y la energía tienen definiciones muy específicas que implican fuerzas, desplazamientos, masas y velocidades. Estos dos conceptos son muy valiosos al analizar una amplia gama de problemas de ingeniería.

13.1A Trabajo de una fuerza

Se definen primero los términos *desplazamiento* y *trabajo* en la forma que se utilizan en mecánica.[†] Considere una partícula que se mueve de un punto A a un punto cercano A' (figura 13.1). Si $\mathbf{r}$ denota el vector de posición correspondiente al punto A , el vector que une a A y a A' puede denotarse mediante la diferencial $d\mathbf{r}$; el vector $d\mathbf{r}$ se denomina el **desplazamiento** de la partícula. Suponga ahora que una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre la partícula. El **trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$** se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.1)$$

Se obtiene dU al formar el producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. Denotando por medio de F y ds , respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, y mediante α el ángulo formado por $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$, y recordando la definición de producto escalar de dos vectores (sección 3.2A), se escribe

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (13.1')$$

Utilizando la ecuación (3.30), es posible expresar también el trabajo dU en términos de las componentes rectangulares de la fuerza y del desplazamiento:

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (13.1'')$$

Al ser una cantidad escalar, el trabajo tiene magnitud y signo, pero no dirección.

Nótese que el trabajo debe expresarse en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, el trabajo debe expresarse en pies-lb o pulg-lb. Si se emplean unidades del SI, el trabajo se expresará en N·m. La unidad de trabajo N·m se deno-

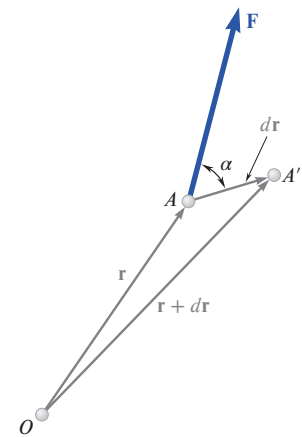


Figura 13.1 El trabajo de una fuerza que se aplica a una partícula es el producto escalar de la fuerza $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$ de la partícula.

[†] La definición de trabajo se presentó en la sección 10.1A y sus propiedades básicas en las secciones 10.1A y 10.2A. Por conveniencia, se repiten aquí las partes de este material que se relacionan con la cinética de partículas.

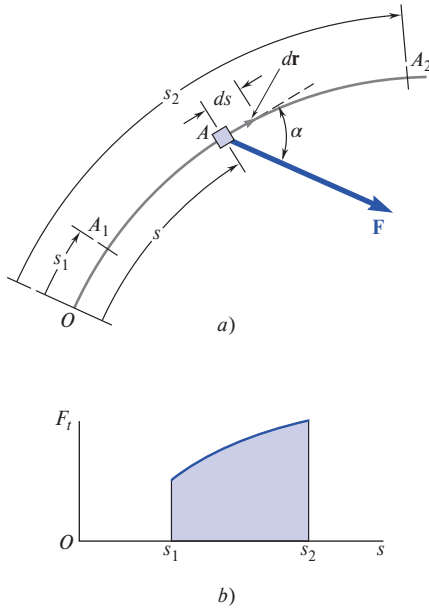


Figura 13.2 a) El trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ en un desplazamiento finito es la integral de la ecuación (13.1) desde el punto A_1 hasta el punto A_2 . b) El trabajo está representado por el área debajo del gráfico de F_t versus s desde s_1 hasta s_2 .

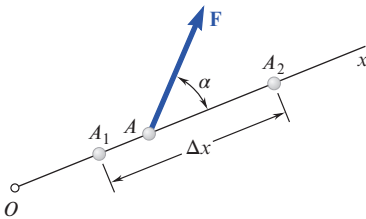


Figura 13.3 Para una fuerza constante en movimiento rectilíneo, el trabajo equivale al desplazamiento por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

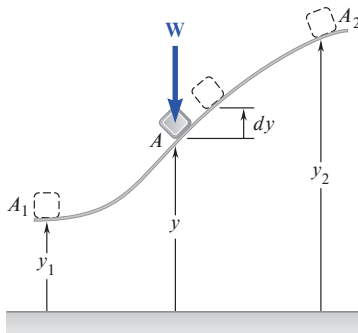


Figura 13.4 El trabajo realizado por la fuerza de gravedad es el producto del peso y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del objeto. Si el objeto se mueve hacia arriba, el trabajo realizado por la gravedad es negativo.

mina como **joule (J)**.[†] Al recordar los factores de conversión indicados en la sección 12.1C, se escribe

$$1 \text{ pie} \cdot \text{lb} = (1 \text{ pie})(1 \text{ lb}) = (0.3048 \text{ m})(4.448 \text{ N}) = 1.356 \text{ J}$$

Se deduce de la ecuación (13.1') que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si α es obtuso. Son tres los casos de interés particular. Si la fuerza $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que $d\mathbf{r}$, y el trabajo dU se reduce a $F ds$. Si $\mathbf{F}$ tiene dirección opuesta a la de $d\mathbf{r}$, el trabajo es $dU = -F ds$. Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es cero.

El trabajo de $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento *finito* de la partícula de A_1 a A_2 (figura 13.2a) se obtiene al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria que describe la partícula. Este trabajo, denotado por $U_{1 \rightarrow 2}$, es

Trabajo de una fuerza

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.2)$$

Al utilizar la expresión alterna de la ecuación (13.1') para el trabajo elemental dU y observar que $F \cos \alpha$ representa la componente tangencial F_t de la fuerza, es posible expresar el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (13.2')$$

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ se representa por medio del área bajo la curva que se obtiene al graficar $F_t = F \cos \alpha$ contra s (figura 13.2b).

Cuando la fuerza $\mathbf{F}$ se define por medio de sus componentes rectangulares, la expresión (13.1'') puede utilizarse para el trabajo elemental. En ese caso se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.2'')$$

donde la integración se va a realizar a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula.

Es posible usar estas ecuaciones para derivar fórmulas para el trabajo que realiza una fuerza en diversas situaciones comunes e importantes, como se ilustra. Estas fórmulas pueden simplificar los cálculos necesarios para resolver muchos problemas comunes. Para otras situaciones, es posible utilizar las ecuaciones (13.1) y (13.2) y sus variantes.

Trabajo de una fuerza constante en movimiento rectilíneo. Cuando una partícula que se mueve en una línea recta se somete a una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud constante y dirección constante (figura 13.3), la fórmula (13.2') produce

$$U_{1 \rightarrow 2} = (F \cos \alpha) \Delta x \quad (13.3)$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección de movimiento

Δx = desplazamiento de A_1 a A_2

Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad. El trabajo del peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo, esto es, de la fuerza que la gravedad ejerce sobre ese cuerpo, se obtiene al sustituir las componentes de $\mathbf{W}$ en las ecuaciones (13.1'') y (13.2''). Al elegir el eje y hacia arriba (figura 13.4), se tiene $F_x = 0$, $F_y = -W$ y $F_z = 0$, y se escribe

$$dU = -W dy$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

[†] El joule (J) es la unidad de energía del SI, ya sea en forma mecánica (trabajo, energía potencial, energía cinética) o en forma química, eléctrica o térmica. Se debe señalar que aun cuando $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$, el momento de una fuerza debe expresarse en $\text{N} \cdot \text{m}$ y no en joules, ya que el momento de una fuerza no es una forma de energía.

0

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y \quad (13.4')$$

donde Δy es el desplazamiento vertical de A_1 a A_2 . En consecuencia, el trabajo del peso W es igual al **producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo**. El trabajo es positivo cuando $\Delta y < 0$, esto es, cuando el cuerpo se mueve hacia abajo. Cuando el cuerpo se mueve hacia arriba ($\Delta y > 0$), la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas y el trabajo es negativo.

Trabajo realizado por la fuerza que ejerce un resorte. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que este último no está deformado cuando el cuerpo se encuentra en A_0 (figura 13.5a). Para un resorte lineal, la magnitud de la fuerza F ejercida por el resorte sobre un cuerpo A es proporcional a la deformación x del resorte medida a partir de la posición A_0 (es decir, $x = L_{\text{estirado}} - L_{\text{sin estirar}}$). Se tiene:

$$F = kx \quad (13.5)$$

donde k es la **constante del resorte**, expresada en N/m o kN/m si se usan unidades del SI y en lb/pie o lb/pulg si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos.[†]

El trabajo de la fuerza F ejercido por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo de $A_1(x = x_1)$ a $A_2(x = x_2)$ se obtiene al escribir

$$\begin{aligned} dU &= -F dx = -kx dx \\ U_{1 \rightarrow 2} &= -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \end{aligned} \quad (13.6)$$

Debe tenerse cuidado de expresar k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, k debe expresarse en lb/pies y x en pies, o k en lb/pulg y x en pulgadas. En el primer caso, el trabajo se obtiene en pies-lb, en el segundo, en pulg-lb. Adviértase que el trabajo de la fuerza F ejercida por el resorte sobre el cuerpo es positivo cuando $x_2 < x_1$, esto es, una vez que el resorte está regresando a la posición no deformada. Cuando el cuerpo se mueve de x_1 a x_2 , el trabajo de la fuerza es negativo, dado que el desplazamiento y la fuerza están en direcciones opuestas.

Puesto que la ecuación (13.5) es la de una línea recta de pendiente k que pasa por el origen, el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de F durante el desplazamiento de A_1 a A_2 puede obtenerse al evaluar el área del trapecioide que se muestra en la figura 13.5b). Esto se hace al calcular F_1 y F_2 y multiplicar la base Δx del trapecioide por medio de su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Puesto que el trabajo de la fuerza F ejercido por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx , se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2) \Delta x \quad (13.6')$$

Trabajo realizado por una fuerza gravitacional. En la sección 12.2C se vio que dos partículas de masa M y m a una distancia r una de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas F y $-F$, dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas y de magnitud

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

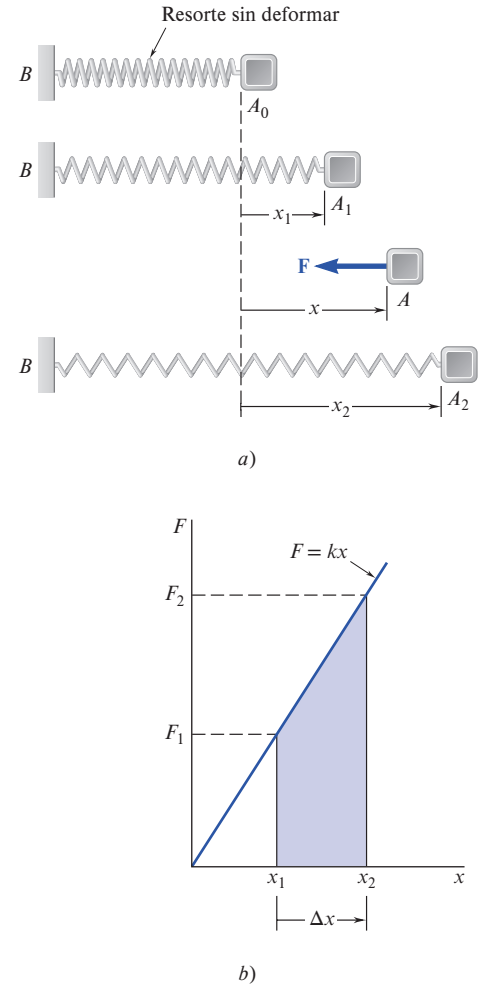


Figura 13.5 a) El trabajo de una fuerza ejercida por un resorte depende de la constante del resorte y de las posiciones inicial y final del resorte. b) El trabajo está representado por el área debajo del gráfico de fuerza versus posición.

[†] La relación $F = kx$ es correcta únicamente bajo condiciones estáticas. En condiciones dinámicas, la ecuación (13.5) debe modificarse para tomar en cuenta la inercia del resorte. Sin embargo, el error que se introduce al utilizar la relación $F = kx$ en la solución de problemas de cinética es mínimo si la masa del resorte es pequeña comparada con las demás masas en movimiento.

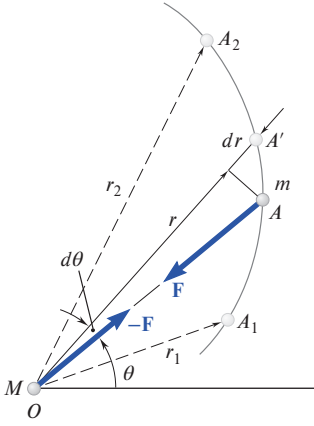


Figura 13.6 El trabajo de una fuerza gravitacional depende de la constante gravitacional, las masas de los cuerpos que interactúan y la distancia radial entre ellos.

Suponga que la partícula M ocupa una posición fija O mientras la partícula m se mueve a lo largo de la trayectoria indicada en la figura 13.6. El trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre la partícula m durante un desplazamiento infinitesimal de la partícula de A a A' puede obtenerse al multiplicar la magnitud F de la fuerza por la componente radial dr del desplazamiento. Puesto que $\mathbf{F}$ está dirigida hacia O , y dr se aleja de O , el trabajo es negativo y se escribe

$$dU = -F dr = -G \frac{Mm}{r^2} dr$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento finito de $A_1(r=r_1)$ a $A_2(r=r_2)$ es, por tanto,

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

donde M es la masa de la Tierra. Es posible utilizar esta fórmula para determinar el trabajo de la fuerza ejercida por la Tierra sobre un cuerpo de masa m a una distancia r de su centro, cuando r es más grande que el radio R terrestre. Al recordar la primera de las relaciones en la ecuación (12.27), se puede sustituir el producto GMm en la ecuación (13.7) por WR^2 , donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y W es el peso del cuerpo en la superficie terrestre.

Algunas fuerzas que se encuentran con frecuencia en problemas de cinética *no realizan trabajo*. Se trata de fuerzas aplicadas en puntos fijos ($ds = 0$) o actuando en una dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Entre las fuerzas que no realizan trabajo se encuentran las siguientes: la reacción en un pasador sin fricción cuando el cuerpo que se soporta gira alrededor del pasador; la fuerza normal en una superficie fija sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie; la reacción en un rodillo que se desplaza a lo largo de su pista, y el peso de un cuerpo cuando el centro de gravedad se mueve en forma horizontal.

13.1B Principio del trabajo y la energía

Considere una partícula de masa m que se somete a una fuerza $\mathbf{F}$ y que se mueve a lo largo de una trayectoria que es rectilínea o curva (figura 13.7). Al expresar la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangenciales de la fuerza y de la aceleración (véase la sección 12.1D), se escribe

$$F_t = ma_t \quad \text{o} \quad F_t = m \frac{dv}{dt}$$

donde v es la rapidez de la partícula. Al recordar de la sección 11.4A que $v = ds/dt$, se obtiene

$$F_t = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds}$$

$$F_t ds = mv dv$$

Al integrar desde A_1 , donde $s = s_1$ y $v = v_1$, hasta A_2 , donde $s = s_2$ y $v = v_2$, se escribe

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (13.8)$$

El miembro de la izquierda de la ecuación (13.8) representa el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre la partícula durante el desplazamiento de A_1 a A_2 ; como se indica antes, el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es una cantidad escalar. La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ es también una cantidad escalar; se define como la energía cinética de la partícula y se denota mediante T . Se escribe

Energía cinética de una partícula

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

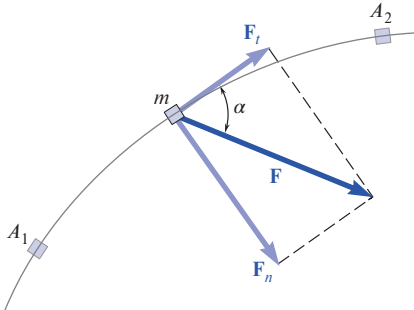


Figura 13.7 Una partícula m sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$.

Al sustituir en la ecuación (13.8), se tiene

Principio del trabajo y la energía

$$U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (13.10)$$

la cual expresa que, cuando la partícula se mueve de A_1 a A_2 bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F}$, **el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ es igual al cambio de la energía cinética de la partícula**. Lo anterior se conoce como el **principio del trabajo y la energía**. Al reorganizar los términos de la ecuación (13.10), se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

Al igual que la segunda ley de Newton de la cual se deriva, el principio del trabajo y la energía se aplica solo con respecto a un marco de referencia newtoniano (sección 12.1A). La rapidez v que se emplea para determinar la energía cinética T debe, por tanto, medirse con respecto a un marco de referencia newtoniano.

Puesto que tanto el trabajo como la energía cinética son cantidades escalares, su suma puede calcularse como una suma algebraica ordinaria, considerándose el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ positivo o negativo de acuerdo con la dirección de $\mathbf{F}$. Cuando varias fuerzas actúan sobre la partícula, la expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre la partícula; esta se obtiene sumando algebraicamente el trabajo de las diversas fuerzas.

Como se señaló antes, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar. Además, por la definición $T = \frac{1}{2}mv^2$, la energía cinética siempre es positiva, independientemente de la dirección de movimiento de la partícula. Al considerar el caso particular cuando $v_1 = 0$ y $v_2 = v$, y al sustituir $T_1 = 0$ y $T_2 = T$ en la ecuación (13.10) se observa que el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a T . En consecuencia, la energía cinética de una partícula que se mueve con una rapidez v representa el trabajo que debe efectuarse para llevar la partícula desde el reposo hasta la rapidez v . Si se sustituye $T_1 = T$ y $T_2 = 0$ en la ecuación (13.10), también se advierte que cuando una partícula que se mueve con una rapidez v se lleva al reposo, el trabajo ejecutado por las fuerzas que actúan sobre la misma es $-T$. Suponiendo que no se disipa energía en forma de calor, la conclusión es que el trabajo realizado por las fuerzas ejercidas *por la partícula* sobre los cuerpos que provocan que quede en reposo es igual a T . Por consiguiente, la energía cinética de una partícula representa también **la capacidad para realizar trabajo asociado con la rapidez de la partícula**.

La energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se usan unidades del SI y en pies·lb si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos. Se confirma que, en unidades del SI,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \text{kg}(\text{m/s})^2 = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)\text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

en tanto que, en unidades de uso común en Estados Unidos,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = (\text{slug})(\text{pies/s})^2 = (\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pies})(\text{pies/s})^2 = \text{pies} \cdot \text{lb}$$

13.1C Aplicaciones del principio del trabajo y la energía

La aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas que implican fuerzas, desplazamientos y velocidades. Considere, por ejemplo, el péndulo OA compuesto por una plomada A de peso W unida a una cuerda de longitud l (figura 13.8a). El péndulo se suelta sin velocidad inicial desde una posición horizontal OA_1 y se deja que oscile en un plano vertical. Se desea determinar la rapidez de la plomada cuando pasa por A_2 , directamente abajo de O .

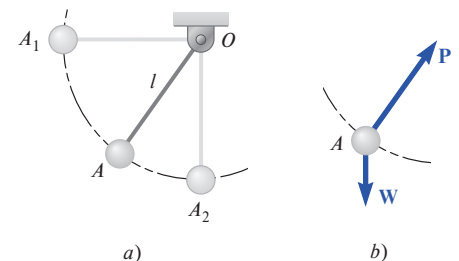


Figura 13.8 a) Una plomada de peso W oscila desde la posición inicial A_1 a la posición final A_2 ; b) diagrama de cuerpo libre de la plomada en la posición A .

Primero se determina el trabajo realizado durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 por las fuerzas que actúan sobre la plomada. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de esta última, indicando todas las fuerzas *reales* que actúan sobre ella, esto es, el peso $\mathbf{W}$ y la fuerza $\mathbf{P}$ ejercida por la cuerda (figura 13.8b). (Un vector de inercia no es una fuerza real y *no debe* incluirse en el diagrama de cuerpo libre). Adviértase que la fuerza $\mathbf{P}$ no realiza trabajo, ya que es normal a la trayectoria; la única fuerza que efectúa trabajo es consecuentemente el peso $\mathbf{W}$. El trabajo de $\mathbf{W}$ se obtiene al multiplicar su magnitud W por el desplazamiento vertical l (sección 13.1A); en vista de que el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo es positivo. Por tanto, se escribe $U_{1 \rightarrow 2} = Wl$.

Se considera ahora la energía cinética de la plomada. Se encuentra que $T_1 = 0$ en A_1 y que $T_2 = \frac{1}{2}(W/g)v_2^2$ en A_2 . Después de esto es posible aplicar el principio del trabajo y la energía. De la ecuación (13.11), se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad 0 + Wl = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$$

Al resolver para v_2 , se encuentra $v_2 = \sqrt{2gl}$. Adviértase que la rapidez que se obtiene es la de un cuerpo que cae libremente desde una altura l .

El ejemplo considerado ilustra las siguientes ventajas del método del trabajo y la energía:

1. Con el fin de encontrar la rapidez en A_2 , no hay necesidad de determinar la aceleración en una posición intermedia A y de integrar la expresión que se obtuvo de A_1 a A_2 .
2. Todas las cantidades implicadas son escalares y pueden sumarse de manera directa, sin utilizar las componentes.
3. Las fuerzas que no realizan trabajo se eliminan de la solución del problema.

Lo que es una ventaja en un problema, sin embargo, quizá sea una desventaja en otro. Es evidente, por ejemplo, que no es posible utilizar el método del trabajo y la energía para determinar de manera directa una aceleración. Igualmente es evidente que al determinar una fuerza que es normal a la trayectoria de la partícula (es decir, una fuerza que no realiza trabajo), el método del trabajo y la energía deben complementarse mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Supóngase, por ejemplo, que interesa determinar la tensión en la cuerda del péndulo de la figura 13.8a) cuando la plomada pasa por A_2 . Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la plomada en esa posición (figura 13.9) y se expresa la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangencial y normal. Las ecuaciones $\Sigma F_t = ma_t$ y $\Sigma F_n = ma_n$ producen, respectivamente, $a_t = 0$ y

$$P - W = ma_n = \frac{W}{g} \frac{v_2^2}{l}$$

Sin embargo, la rapidez en A_2 se determinó antes por el método del trabajo y la energía. Al sustituir $v_2^2 = 2gl$ y resolver para P , se escribe

$$P = W + \frac{W}{g} \frac{2gl}{l} = 3W$$

Si se hubieran utilizado solo los principios de estática y se hubiera diseñado la cuerda para soportar el peso de la plomada (o incluso el doble de su peso), la cuerda se habría cortado.

Cuando un problema implica dos o más partículas, es factible aplicar el principio del trabajo y la energía al sistema de partículas. Al sumar las energías cinéticas de las diversas partículas y considerar el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre ellas, es posible escribir una sola ecuación del trabajo y la energía para todas las partículas implicadas. Se tiene

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

donde T_1 representa la suma aritmética de las energías cinéticas de las partículas que se consideran en la posición 1, T_2 , representa la suma aritmética de las energías cinéticas de las partículas involucradas en la posición 2, y $U_{1 \rightarrow 2}$ es el trabajo de todas las

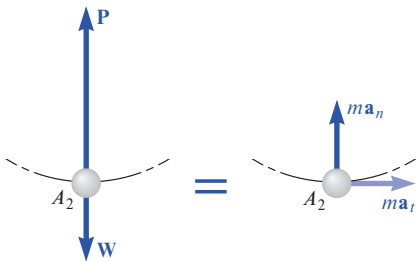


Figura 13.9 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético para determinar la fuerza en una plomada de un péndulo.

fuerzas que actúan sobre las partículas, incluyendo las fuerzas de acción y reacción que ejercen las partículas entre sí. Sin embargo, en problemas que implican cuerpos conectados mediante cuerdas o eslabones inextensibles, se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por una cuerda o eslabón determinado sobre los dos cuerpos que conecta, ya que los puntos de aplicación de estas fuerzas se mueven a través de distancias iguales (véase el problema modelo 13.2). (La aplicación del método del trabajo y la energía a un sistema de partículas se estudia en detalle en el capítulo 14).

En los problemas de cinética de partículas, normalmente la fuerza de fricción actúa en una dirección opuesta a la del movimiento (por ejemplo, un automóvil mientras frena o una caja que se desliza sobre una rampa). En estos casos, el trabajo de fricción representa energía disipada en calor y resulta en una disminución de la energía cinética del cuerpo involucrado (véase el problema modelo 13.3).

13.1D Potencia y eficiencia

La **potencia** se define como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo. En la selección de un motor o máquina, la potencia es un criterio mucho más importante que la cantidad real de trabajo que se lleva a cabo. Es posible utilizar un motor pequeño o una gran planta eléctrica para realizar una cantidad determinada de trabajo; sin embargo, el motor pequeño quizá requiera un mes para efectuar el trabajo que la planta eléctrica realizaría en unos cuantos minutos. Si ΔU es el trabajo realizado durante el intervalo Δt , entonces la potencia promedio durante ese intervalo es

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

En el límite, al dejar que Δt tienda a cero, se obtiene

Potencia

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} \quad (13.12)$$

Al sustituir el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por dU , se puede escribir también

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

y, al recordar que $d\mathbf{r}/dt$ representa la velocidad $\mathbf{v}$ del punto de aplicación de $\mathbf{F}$, se obtiene

$$\text{Potencia} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

Puesto que la potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, esta debe expresarse en unidades que se obtienen al dividir unidades de trabajo entre la unidad de tiempo. De tal modo, si se usan unidades del SI, la potencia debe expresarse en J/s; esta unidad se conoce como *watt* (W). Se tiene

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

Si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos, la potencia debe expresarse en pie-lb/s o en *caballos de potencia* (hp), con esta última unidad definida como

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ pie} \cdot \text{lb/s}$$

Al recordar de la sección 13.1A que $1 \text{ pie} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J}$, se verifica que

$$\begin{aligned} 1 \text{ pie} \cdot \text{lb/s} &= 1.356 \text{ J/s} = 1.356 \text{ W} \\ 1 \text{ hp} &= 550(1.356 \text{ W}) = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW} \end{aligned}$$



Fotografía 13.1 La potencia que se utiliza para hacer funcionar una aerosilla en un centro de esquí es el producto de la fuerza aplicada y la rapidez de la aerosilla.

©Ernst-Georg Kohout/imageBROKER/SuperStock

La **eficiencia mecánica** de una máquina se definió en la sección 10.1D como la relación entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada:

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (13.14)$$

Esta definición se basa en la suposición de que el trabajo se realiza a una tasa constante. La relación entre el trabajo de salida y el de entrada es, por tanto, igual a la relación de las tasas a las cuales se realiza el trabajo de salida y de entrada, y se tiene

Eficiencia mecánica

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (13.15)$$

Debido a las pérdidas de energía resultado de la fricción, el trabajo de salida siempre es más pequeño que el trabajo de entrada y, en consecuencia, la salida de potencia es siempre menor que la entrada de potencia. La eficiencia mecánica de una máquina es entonces siempre menor que 1.

Cuando se usa una máquina para transformar la energía mecánica en energía eléctrica, o la energía térmica en energía mecánica, su *eficiencia* o *rendimiento total* puede obtenerse de la ecuación (13.15). La eficiencia total de una máquina es siempre menor que 1; proporciona una medida del total de las diversas pérdidas de energía implicadas (pérdidas de energía eléctrica o térmica, así como pérdidas por fricción). Advierta que es necesario expresar la salida de potencia y la entrada de potencia en las mismas unidades antes de utilizar la ecuación (13.15).

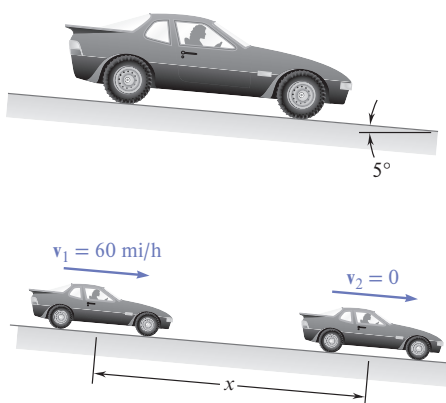


Figura 1 El automóvil en las dos posiciones consideradas.

Problema modelo 13.1

Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° de inclinación a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre los neumáticos) de 1 500 lb. Determine la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse.

ESTRATEGIA: Se proporciona la velocidad del automóvil en dos posiciones de la carretera y se debe determinar la distancia x entre ellas (figura 1), por tanto, se utiliza el principio del trabajo y la energía.

MODELAR: Se selecciona el automóvil como un sistema y se supone que puede modelarse como una partícula.

ANALIZAR: Para aplicar el principio del trabajo y la energía, debe hallarse la energía cinética en cada posición del automóvil. La diferencia entre las energías cinéticas será igual al trabajo realizado por la fuerza de frenado.

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1)$$

Por tanto, se deben calcular ambos términos de esta ecuación.

Energía cinética

Posición 1.
$$v_1 = \left(60 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5\,280 \text{ pies}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ pies/s}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(4\,000/32.2)(88)^2 = 481\,000 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

(continúa)

Posición 2.

$$v_2 = 0 \quad T_2 = 0$$

Trabajo. La mejor manera de identificar qué fuerzas trabajan es dibujar un diagrama de cuerpo libre, como se ilustra en la figura 2. Resulta claro que solo las fuerzas externas que realizan un trabajo son la fuerza total de frenado y el peso. La fuerza normal no realiza ningún trabajo dado que es perpendicular al movimiento. Al utilizar la definición de trabajo se obtiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = -1\,500x + (4\,000 \text{ sen } 5^\circ)x = -1\,151x$$

Obsérvese que el trabajo de la fuerza gravitacional es positivo dado que el automóvil se desplaza hacia abajo. Al reemplazar en la ecuación (1) se obtiene

$$481\,000 - 1\,151x = 0 \quad x = 418 \text{ pies} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Resolver este problema mediante la segunda ley de Newton requerirá determinar la desaceleración del automóvil a partir de un diagrama de cuerpo libre (figura 2) y, luego, integrarlo utilizando la información de velocidad dada. Utilizar el principio del trabajo y la energía permite evitar hacer dicho cálculo.

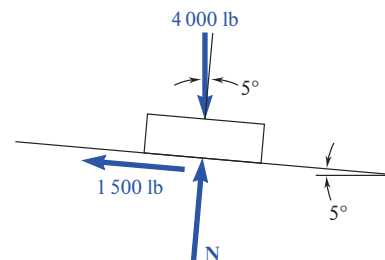


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre del automóvil.

Problema modelo 13.2

Dos bloques están unidos por un cable inextensible en la forma que se muestra. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la velocidad del bloque A después de que este se haya movido 2 m. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano es $\mu_k = 0.25$ y que la polea no tiene peso ni fricción.

ESTRATEGIA: Se desea determinar la velocidad y se proporcionan dos ubicaciones en el espacio, por tanto, se utiliza el principio del trabajo y la energía. Es posible aplicar este principio a cada uno de los bloques y combinar las ecuaciones resultantes, o se puede optar porque el sistema sea ambos bloques y el cable y así evitar la necesidad de determinar el trabajo de las fuerzas internas.

MODELAR: Se definen dos sistemas separados, uno para cada bloque y se modelan como partículas. Como se enuncia en el problema, se supone que la polea no tiene peso ni fricción.

ANALIZAR:

Trabajo y energía del bloque A. Al denotar la fuerza de fricción como F_A y la fuerza ejercida por el cable mediante F_C , se escribe (figura 1)

$$m_A = 200 \text{ kg} \quad W_A = (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 1\,962 \text{ N}$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.25(1\,962 \text{ N}) = 490 \text{ N}$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2: \quad 0 + F_C(2 \text{ m}) - F_A(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}m_A v^2$$

$$F_C(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}(200 \text{ kg})v^2 \quad (1)$$

Trabajo y energía del bloque B. A partir del diagrama de cuerpo libre para el bloque B (figura 2), se tiene

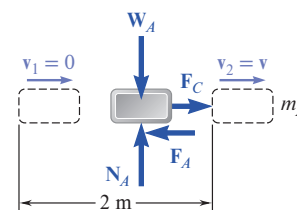
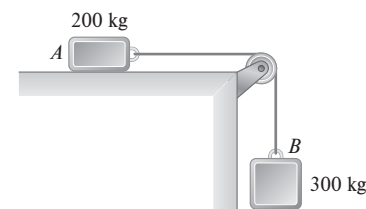


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre y las dos posiciones del bloque A.

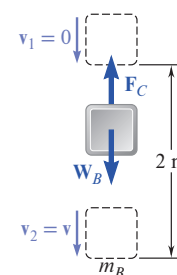


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre y las dos posiciones del bloque B.

(continúa)

$$\begin{aligned}
 m_B &= 300 \text{ kg} & W_B &= (300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2\,940 \text{ N} \\
 T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2: & 0 + W_B(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) &= \frac{1}{2}m_B v^2 \\
 (2\,940 \text{ N})(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) &= \frac{1}{2}(300 \text{ kg})v^2 & (2)
 \end{aligned}$$

Ahora se suman los miembros izquierdo y derecho de las ecuaciones (1) y (2). El trabajo de las fuerzas que ejerce el cable sobre A y B se cancela. Es por esto que al resolver problemas utilizando trabajo y energía, a menudo lo mejor es seleccionar el sistema de modo que incluya todos los objetos de interés, para no preocuparse por el trabajo de las fuerzas internas. Por tanto, después de combinar las ecuaciones (1) y (2) o al seleccionar que el sistema sea el bloque A , el bloque B y el cable, se obtiene

$$\begin{aligned}
 (2\,940 \text{ N})(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) &= \frac{1}{2}(200 \text{ kg} + 300 \text{ kg})v^2 \\
 4\,900 \text{ J} &= \frac{1}{2}(500 \text{ kg})v^2 & v &= 4.43 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

REVISAR y PENSAR: Al utilizar el principio del trabajo y la energía, generalmente, se ahorra tiempo al optar porque el sistema abarque todo lo que tiene movimiento. Ahora que se conoce la velocidad del bloque, se puede utilizar la ecuación (1) a fin de determinar la fuerza del cable. Únicamente cuando se necesite determinar una fuerza interna, se deberá aislar parte del sistema.

Problema modelo 13.3

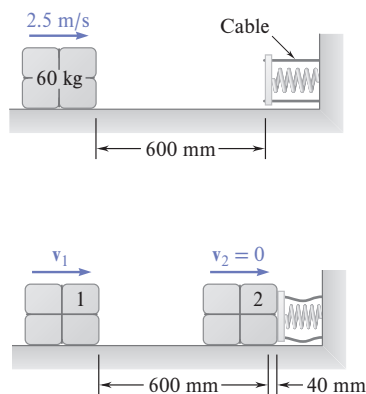


Figura 1 El paquete en las posiciones 1 y 2.

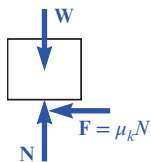


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre antes de que se active el resorte.

Se utiliza un resorte para detener un paquete de 60 kg que se desliza sobre una superficie horizontal. El resorte tiene una constante $k = 20 \text{ kN/m}$ y se sostiene mediante cables de manera que se encuentre inicialmente comprimido 120 mm. Sabiendo que el paquete tiene una velocidad de 2.5 m/s en la posición mostrada, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la superficie de manera que la deformación adicional máxima del resorte sea de 40 mm, *b*) la velocidad del paquete cuando este pasa otra vez por la posición mostrada.

ESTRATEGIA: Se cuenta con la información de la velocidad y las ubicaciones específicas en el espacio, por tanto, se usa el principio del trabajo y la energía. Se divide el movimiento en dos segmentos: el segmento 1 es la posición hasta el punto donde el resorte tiene una deformación máxima (figura 1), y el segmento 2 es desde el punto en el que el resorte tiene una deformación máxima hasta la posición original.

MODELAR: El sistema es el cajón, que se puede modelar como una partícula. La figura 2 ilustra un diagrama de cuerpo libre para el cajón cuando no está en contacto con el resorte. Una vez que golpea el resorte, tiene una fuerza adicional P que actúa como consecuencia de la compresión del resorte (figura 3).

ANALIZAR: El principio del trabajo y la energía es

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1)$$

Se denomina a la posición inicial del paquete posición 1 y la posición donde ocurre la mayor deformación del resorte, posición 2 (figura 1).

(continúa)

a) Movimiento desde la posición 1 hasta la posición 2**Energía cinética. Posición 1.** $v_1 = 2.5 \text{ m/s}$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2 = 187.5 \text{ N}\cdot\text{m} = 187.5 \text{ J}$$

Posición 2 (deformación máxima del resorte): $v_2 = 0$ $T_2 = 0$ **Trabajo. Fuerza de fricción F.** Se tiene (figura 2)

$$F = \mu_k N = \mu_k W = \mu_k mg = \mu_k (60 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = (588.6 \text{ N})\mu_k$$

El trabajo de **F** es negativo e igual a

$$(U_{1 \rightarrow 2})_f = -Fx = -(588.6 \text{ N})\mu_k(0.600 \text{ m} + 0.040 \text{ m}) = -(377 \text{ J})\mu_k$$

Fuerza del resorte P. La fuerza variable **P** ejercida por el resorte realiza una cantidad de trabajo negativa igual al área bajo la curva fuerza-deformación de la fuerza del resorte. Se tiene

$$P_{\min} = kx_0 = (20 \text{ kN/m})(120 \text{ mm}) = (20\,000 \text{ N/m})(0.120 \text{ m}) = 2\,400 \text{ N}$$

$$P_{\max} = P_{\min} + k \Delta x = 2\,400 \text{ N} + (20 \text{ kN/m})(40 \text{ mm}) = 3\,200 \text{ N}$$

$$(U_{1 \rightarrow 2})_e = -\frac{1}{2}(P_{\min} + P_{\max}) \Delta x = -\frac{1}{2}(2\,400 \text{ N} + 3\,200 \text{ N})(0.040 \text{ m}) = -112.0 \text{ J}$$

El trabajo total entre las posiciones 1 y 2 es entonces

$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_f + (U_{1 \rightarrow 2})_e = -(377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía. Se puede determinar el coeficiente de fricción cinética a partir de la expresión para el principio del trabajo y la energía en este segmento del movimiento.

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2: \quad 187.5 \text{ J} - (377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J} = 0 \quad \mu_k = 0.20 \quad \blacktriangleleft$$

b) Movimiento desde la posición 2 hasta la posición 3. Se denomina la posición donde el paquete regresa a su posición inicial como posición 3 (figura 4).**Energía cinética. Posición 2.** $v_2 = 0$ $T_2 = 0$

$$\text{Posición 3.} \quad T_3 = \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$$

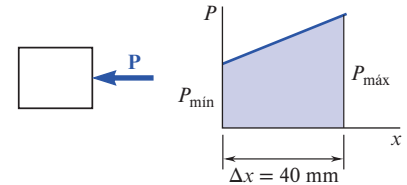
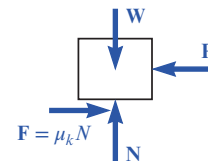
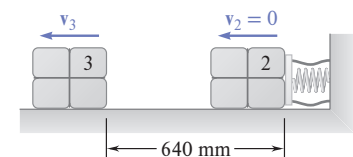
Trabajo. Puesto que las distancias implicadas son las mismas, los valores numéricos del trabajo de la fuerza de fricción **F** y de la fuerza del resorte **P** son los mismos que antes. Sin embargo, mientras que el trabajo **F** sigue siendo negativo, el trabajo de **P** es en este caso positivo.

$$U_{2 \rightarrow 3} = -(377 \text{ J})\mu_k + 112.0 \text{ J} = -75.5 \text{ J} + 112.0 \text{ J} = +36.5 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía.

$$T_2 + U_{2 \rightarrow 3} = T_3: \quad 0 + 36.5 \text{ J} = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$$

$$v_3 = 1.103 \text{ m/s} \quad v_3 = 1.103 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Fue necesario dividir este problema en dos segmentos. A partir del primer segmento se pudo determinar el coeficiente de fricción. Luego, se puede utilizar el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del paquete en cualquier otro lugar. Obsérvese que el sistema no pierde energía por el resorte; devuelve toda su energía al paquete. Se deberá diseñar algo que pueda absorber la energía cinética del paquete a fin de llevarlo al reposo.**Figura 3** Fuerza **P** sobre el bloque después de que golpea el resorte.**Figura 4** Diagrama de cuerpo libre cuando el paquete se desplaza hacia la izquierda.

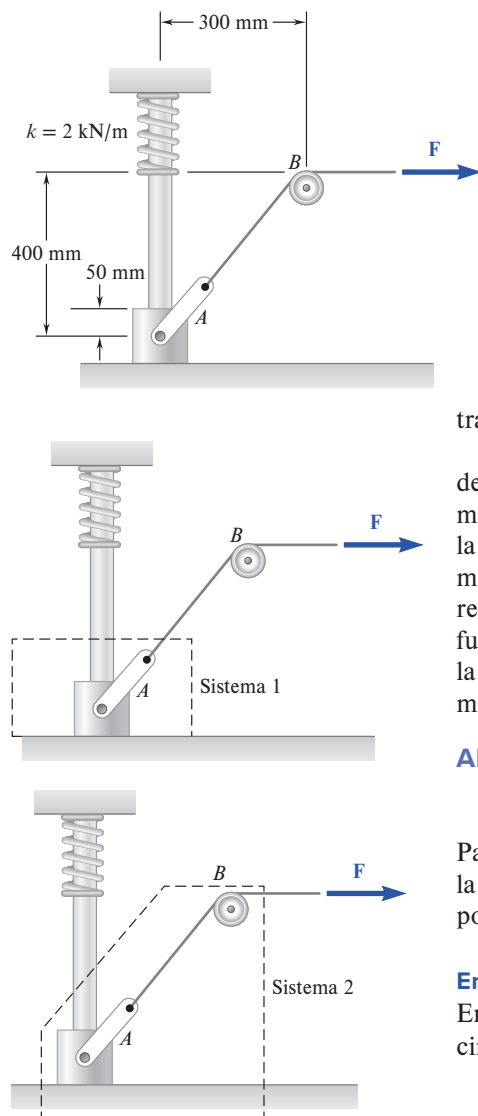


Figura 1 Posibles sistemas para este problema.

Problema modelo 13.4

Un collarín de 2 kg A parte del reposo en la posición que se ilustra cuando se aplica una fuerza constante $F = 100 \text{ N}$ al cable, lo que provoca que el collarín A se mueva hacia arriba sobre el eje vertical liso. Si se ignora la masa de la polea sin fricción y el resorte, determine la rapidez de A cuando el resorte se comprime 50 mm.

ESTRATEGIA: Se cuenta con la información acerca de las dos posiciones y se solicita hallar la rapidez, por lo que debe utilizarse el principio del trabajo y la energía.

MODELAR: Se cuenta con varias opciones de sistema. La figura 1 ilustra dos sistemas posibles.

¿Cuál debe usarse? Es posible resolver el problema utilizando cualquiera de los dos, pero resulta que algunas opciones de sistemas hacen que los problemas sean más sencillos de resolver que otros. Para el sistema 1, la tensión de la cuerda es F , pero solamente la componente de F en la dirección del movimiento realiza el trabajo. Esta componente cambia constantemente, por lo que resulta difícil calcular el trabajo. Para el sistema 2, el trabajo que realiza la fuerza F es solo la magnitud de F (dado que es constante) por la distancia por la que la fuerza se desplaza en sentido horizontal. Por tanto, el problema es más sencillo de resolver mediante el sistema 2.

ANALIZAR: El principio del trabajo y la energía es

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1)$$

Para comenzar, se dibuja el sistema en las dos posiciones que se ilustran en la figura 2. Dado que la figura estará muy sobrecargada si se trabajan ambas posiciones en la misma figura, se deberán dibujar en paralelo.

Energía cinética. Dado que el collarín está inicialmente en reposo, $T_1 = 0$. En la posición 2, cuando el resorte superior se comprime 50 mm, la energía cinética es

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(2 \text{ kg})v_2^2 = v_2^2$$

Trabajo. Dado que el collarín se eleva desde la posición 1 hasta donde el resorte se comprime 50 mm, el trabajo que realiza el peso es

$$(U_{1 \rightarrow 2})_g = -mgy_2 = -(2 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \text{ m}) = -7.848 \text{ J}$$

y el trabajo de la fuerza del resorte es

$$(U_{1 \rightarrow 2})_s = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = 0 - \frac{1}{2}(2000 \text{ N/m})(0.05 \text{ m})^2 = -2.50 \text{ J}$$

Finalmente, se debe calcular el trabajo de la fuerza 100 N. En la posición 1, la longitud AB es

$$(l_{AB})_1 = \sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2} = 0.5 \text{ m}$$

En la posición 2, la longitud AB es $(l_{AB})_2 = 0.3 \text{ m}$. Por tanto, la distancia que corre la fuerza 100 N es

$$d = (l_{AB})_1 - (l_{AB})_2 = 0.5 \text{ m} - 0.3 \text{ m} = 0.2 \text{ m}$$

(continúa)

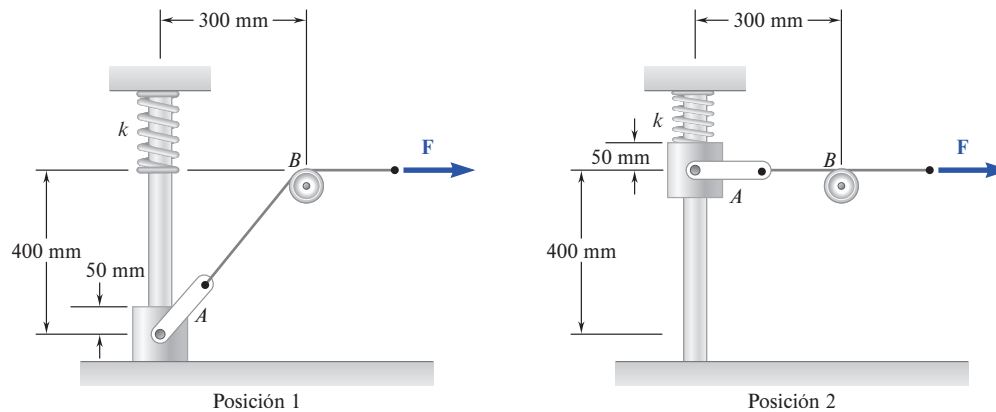


Figura 2 Sistema en las dos posiciones de interés.

El trabajo que realiza la fuerza 100 N F es

$$(U_{1 \rightarrow 2})_F = Fd = (100 \text{ N})(0.5 \text{ m} - 0.3 \text{ m}) = 20 \text{ J}$$

Por tanto, el trabajo total es

$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_g + (U_{1 \rightarrow 2})_s + (U_{1 \rightarrow 2})_F = -7.848 \text{ J} - 2.50 \text{ J} + 20 \text{ J} = 9.652 \text{ J}$$

Sustituir estos valores en el principio del trabajo y la energía genera

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 0 + 9.652 &= v_2^2 \end{aligned}$$

$$v_2 = 3.11 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: ¿Qué ocurriría si la fuerza hubiera sido solo de 10 N en lugar de 100 N? El trabajo habría sido 10 veces inferior (es decir, 2 J) y se habría obtenido $v_2^2 = -8.348$, algo que claramente no tiene sentido. ¿Qué significa? Significa que la suposición de que la masa realmente llegará a la posición 2 es incorrecta.

Problema modelo 13.5

Un martillo de 650 kg de masa baja en caída libre sobre un pilote de 140 kg. Después del impacto, el martillo y el pilote quedan unidos y tienen una velocidad de 3 m/s. La fuerza vertical aplicada sobre el pilote por el suelo después del impacto está dada por $F = 0.02x^2$, donde x y F están expresados en milímetros y kilonewtons, respectivamente. Determine la velocidad del sistema después de haber penetrado 80 mm el suelo.

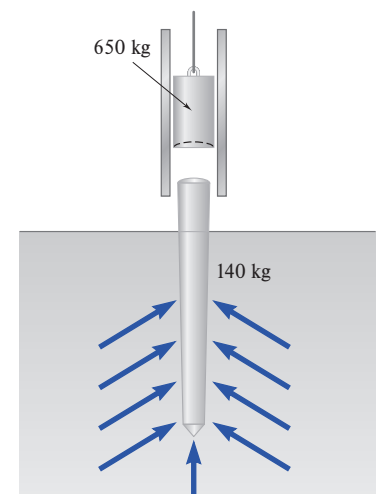
ESTRATEGIA: Se proporciona una fuerza como una función del desplazamiento y dos posiciones; por tanto, debe utilizarse el principio del trabajo y la energía.

MODELAR: El sistema es el martillo y el pilote juntos después del impacto. Pueden modelarse como una única partícula. Un diagrama de cuerpo libre para este sistema (figura 1) ilustra que las únicas dos fuerzas que realizan un trabajo son el peso y la fuerza desde el piso.

ANALIZAR: El principio del trabajo y la energía es

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1)$$

(continúa)



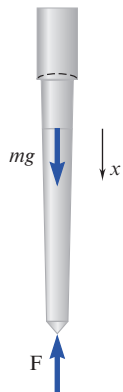
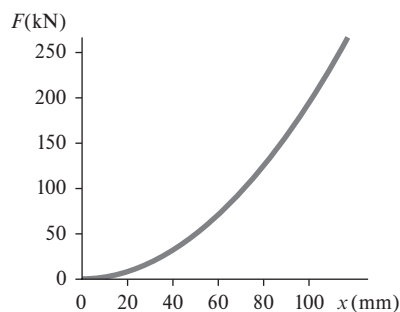


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre después del impacto.

Energía cinética. Las dos posiciones que se consideran son inmediatamente después del impacto y después de que el sistema se haya movido 50 mm. Dado que el sistema inicialmente se desplaza a 3 m/s, la energía cinética inicial es

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(650 \text{ kg} + 140 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 3\,555 \text{ J}$$

En la posición 2, la energía cinética es

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(650 \text{ kg} + 140 \text{ kg})v_2^2 = 395v_2^2$$

Trabajo. Dado que el sistema ingresa al suelo, el peso y la fuerza de resistencia F realizan un trabajo. El trabajo que realiza el peso es

$$(U_{1 \rightarrow 2})_g = mgy = (790 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.08 \text{ m}) = 620.0 \text{ J}$$

La ecuación dada para la fuerza es tal que F está en kN cuando x está expresado en mm. Esto significa que el número de adelante (es decir, los 0.02) debe tener las unidades de kN/mm^2 para que las unidades funcionen. El trabajo de la fuerza de resistencia es

$$\begin{aligned} (U_{1 \rightarrow 2})_F &= \int_{x_1}^{x_0} F_x dx \\ &= \int_0^{80} -(0.02 \text{ kN/mm}^2)x^2 dx = -\left(\frac{0.02}{3} \text{ kN/mm}^2\right)x^3 \bigg|_0^{80} \\ &= -3\,413 \text{ kN}\cdot\text{mm} = -3\,413 \text{ J} \end{aligned}$$

Por tanto, el trabajo total es

$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_g + (U_{1 \rightarrow 2})_F = 620.0 \text{ J} - 3\,413 \text{ J} = -2\,793 \text{ J}$$

Al sustituir las energías cinéticas y el trabajo total en el principio del trabajo y la energía se obtiene

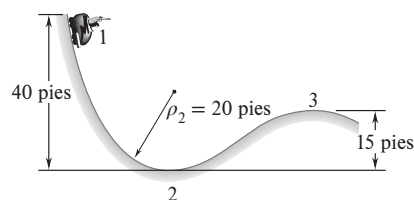
$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 3\,555 - 2\,793 &= 395v_2^2 \end{aligned}$$

$$v_2 = 1.389 \text{ m/s} \downarrow$$

REVISAR y PENSAR: Para determinar a qué profundidad del suelo ingresa el sistema antes de detenerse, se debe fijar la energía cinética final en cero y hacer que la profundidad máxima, x_m , sea la incógnita, así se obtiene

$$3\,555 + 790(9.81)x_m - \left(\frac{2 \times 10^7}{3} \text{ N/m}^2\right)x_m^3 = 0$$

Al resolver esta ecuación, se halla $x_m = 0.0859 \text{ m}$ o 85.9 mm.



Problema modelo 13.6

Un carrito de montaña rusa de 2 000 lb parte del reposo en el punto 1 y desciende sin fricción por la vía que se indica. a) Determine la fuerza que ejerce la vía sobre el vehículo en el punto 2, donde el radio de curvatura de la vía es de 20 pies. b) Determine el valor mínimo seguro del radio de curvatura en el punto 3.

ESTRATEGIA: Utilizar el principio del trabajo y la energía para determinar la rapidez del carro en cualquier lugar de la vía. Para determinar la fuerza que ejerce la vía se debe utilizar la segunda ley de Newton. Se deberá dibujar un

(continúa)

diagrama de cuerpo libre y un diagrama cinético del carro en cada una de las posiciones.

MODELAR: Se selecciona el carro como el sistema y se supone que puede modelarse como una partícula.

ANALIZAR: El principio del trabajo y la energía es

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (1)$$

a) Fuerza ejercida por la vía en el punto 2. Se utiliza el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del vehículo cuando este pasa por el punto 2.

Energía cinética $T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$

Trabajo. La única fuerza que efectúa trabajo es el peso W . Puesto que el desplazamiento vertical desde el punto 1 hasta el punto 2 es de 40 pies hacia abajo, el trabajo del peso es

$$U_{1 \rightarrow 2} = +W(40 \text{ pies})$$

Principio del trabajo y la energía. Al sustituir estos valores en la ecuación (1) se obtiene

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 & 0 + W(40 \text{ pies}) &= \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2 \\ v_2^2 &= 80g = 80(32.2) & v_2 &= 50.8 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

Segunda ley de Newton en el punto 2. La aceleración a_n del carro en el punto 2 tiene una magnitud $a_n = v_2^2/\rho$ y está dirigida hacia arriba. Puesto que las fuerzas externas que actúan sobre el vehículo son W y N (figura 1), se escribe

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_n &= ma_n: & -W + N &= ma_n \\ & & &= \frac{W}{g} \frac{v_2^2}{\rho} \\ & & &= \frac{W}{g} \frac{80g}{20} \end{aligned}$$

$$N = 5W \quad N = 10000 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

b) Valor mínimo de ρ en el punto 3

Principio del trabajo y de la energía. Al aplicar el principio del trabajo y la energía entre el punto 1 y el punto 3, se obtiene

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 3} &= T_3 & 0 + W(25 \text{ pies}) &= \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_3^2 \\ v_3^2 &= 50g = 50(32.2) & v_3 &= 40.1 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

Segunda ley de Newton en el punto 3. El valor mínimo seguro de ρ ocurre cuando $N = 0$. En este caso, la aceleración a_n de magnitud $a_n = v_3^2/\rho$, está dirigida hacia abajo (figura 2), y se escribe

$$\begin{aligned} +\downarrow \Sigma F_n &= ma_n: & W &= \frac{W}{g} \frac{v_3^2}{\rho} \\ & & &= \frac{W}{g} \frac{50g}{\rho} \end{aligned}$$

$$\rho = 50 \text{ pies} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Se trata de un ejemplo donde se necesitan la segunda ley de Newton y el principio del trabajo y la energía. El trabajo-energía se utiliza para determinar la rapidez del carro y la segunda ley de Newton se utiliza para

(continúa)

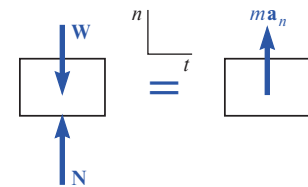


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético en el punto 2.

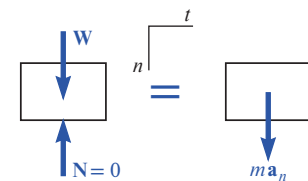


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético en el punto 3.

determinar la fuerza normal. Una fuerza normal de $5W$ equivale a un piloto de guerra siendo jalado a $5g$, lo que debe experimentarse únicamente durante un periodo muy breve. Por razones de seguridad también es necesario verificar que el radio de la curvatura sea un poco superior a 50 pies.

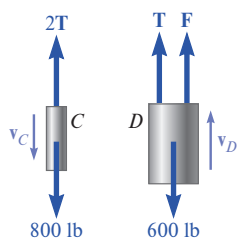
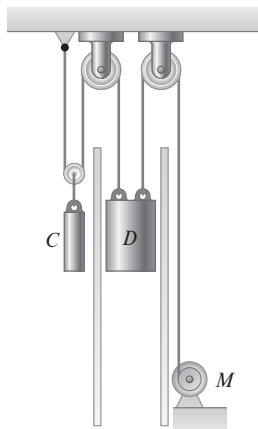


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre para C y D.

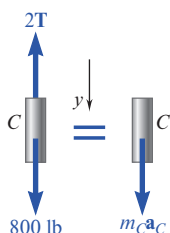


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético para C.

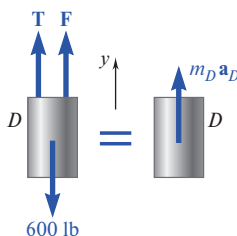


Figura 3 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético para D.

Problema modelo 13.7

El tambor D y su carga tienen un peso combinado de 600 lb, en tanto que el tambor C pesa 800 lb. Determine la potencia entregada por el motor eléctrico M cuando el montacargas a) se mueve hacia arriba a una rapidez constante de 8 pies/s, b) tiene una velocidad instantánea de 8 pies/s y una aceleración de 2.5 pies/s², ambas dirigidas hacia arriba.

ESTRATEGIA: Este problema requiere el uso de la definición de potencia. Se deberá utilizar la segunda ley de Newton para determinar las tensiones de los dos cables.

MODELAR: Se definen dos sistemas separados, uno para el cuerpo C y otro para el cuerpo D y se modelan como partículas. Se supone que la polea no tiene peso ni fricción.

ANALIZAR: Puesto que la fuerza F ejercida por el cable del motor tiene la misma dirección que la velocidad v_D del montacargas, la potencia es igual a Fv_D , donde $v_D = 8$ pies/s. Para obtener la potencia, se debe determinar primero F en cada una de las dos situaciones indicadas.

a) Movimiento uniforme. Se tiene que $a_C = a_D = 0$; ambos cuerpos se encuentran en equilibrio (figura 1).

$$\text{Cuerpo C: } +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T - 800 \text{ lb} = 0 \quad T = 400 \text{ lb}$$

$$\text{Cuerpo D: } +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad F + T - 600 \text{ lb} = 0$$

$$F = 600 \text{ lb} - T = 600 \text{ lb} - 400 \text{ lb} = 200 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (200 \text{ lb})(8 \text{ pies/s}) = 1\,600 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (1\,600 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}) \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}} = 2.91 \text{ hp} \quad \blacktriangleleft$$

b) Movimiento acelerado. Se tiene

$$a_D = 2.5 \text{ pies/s}^2 \uparrow \quad a_C = -\frac{1}{2}a_D = 1.25 \text{ pies/s}^2 \downarrow$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las figuras 2 y 3.

$$\text{Cuerpo C: } +\downarrow \Sigma F_y = m_C a_C: \quad 800 - 2T = \frac{800}{32.2}(1.25) \quad T = 384.5 \text{ lb}$$

$$\text{Cuerpo D: } +\uparrow \Sigma F_y = m_D a_D: \quad F + T - 600 = \frac{600}{32.2}(2.5)$$

$$F + 384.5 - 600 = 46.6 \quad F = 262.1 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (262.1 \text{ lb})(8 \text{ pies/s}) = 2\,097 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (2\,097 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}) \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pies}\cdot\text{lb/s}} = 3.81 \text{ hp} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Como puede esperarse, el motor debe entregar más potencia para generar movimiento acelerado que para generar movimiento a velocidad constante.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En el capítulo anterior se resolvieron problemas relacionados con el movimiento de una partícula utilizando la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para determinar la aceleración $\mathbf{a}$. Al aplicar los principios de la cinemática se pudo determinar a partir de $\mathbf{a}$ la velocidad y el desplazamiento de la partícula en cualquier tiempo. En esta sección se combinó $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y los principios de la cinemática para obtener un método de análisis adicional que se conoce como el **método del trabajo y la energía**. Este elimina la necesidad de calcular la aceleración y relaciona las velocidades de la partícula en dos puntos a lo largo de su trayectoria de movimiento. Para resolver un problema mediante el método del trabajo y la energía se deben seguir estos pasos:

1. Calcular el trabajo de cada una de las fuerzas. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de una fuerza dada $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento finito de la partícula de A_1 a A_2 se define como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad U_{1 \rightarrow 2} = \int (F \cos \alpha) ds \quad (13.2, 13.2')$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es una cantidad escalar y se expresa en pies·lb o pulg·lb en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y en N·m o joules (J) en el SI. Hay que observar que el trabajo efectuado es cero para la fuerza perpendicular al desplazamiento ($\alpha = 90^\circ$). El trabajo negativo se realiza para $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y en particular para una fuerza de fricción, la cual siempre por lo general se opone en dirección al desplazamiento ($\alpha = 180^\circ$).

El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ puede evaluarse fácilmente en los siguientes casos:

a) Trabajo de la fuerza constante en movimiento rectilíneo (problema modelo 13.1)

$$U_{1 \rightarrow 2} = (F \cos \alpha) \Delta x \quad (13.3)$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección del movimiento

Δx = desplazamiento de A_1 a A_2 (figura 13.3).

b) Trabajo de la fuerza de gravedad (problemas modelo 13.1, 13.2, 13.4, 13.5 y 13.6)

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W\Delta y \quad (13.4')$$

donde Δy es el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo de peso W . Advierta que el trabajo es positivo cuando Δy es negativo, esto es, cuando el cuerpo desciende (figura 13.4).

c) Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte (problemas modelo 13.3 y 13.4)

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

donde k es la constante de resorte y x_1 y x_2 son las elongaciones del resorte correspondientes a las posiciones A_1 y A_2 (figura 13.5).

d) Trabajo de una fuerza gravitacional

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

para un desplazamiento del cuerpo $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ (figura 13.6).

2. Calcular la energía cinética en A_1 y A_2 . La energía cinética T es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

donde m es la masa de la partícula y v es la magnitud de su velocidad. Las unidades de la energía cinética son las mismas que las unidades del trabajo, esto es, pies·lb o pulg·lb si se usan unidades de uso común en Estados Unidos y N·m o joules (J) si se usan unidades del SI.

3. Sustituir los valores para el trabajo realizado $U_{1 \rightarrow 2}$ y las energías cinéticas T_1 y T_2 en la ecuación

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

Habrà una ecuación escalar que pueda resolver para una incógnita. Este principio se puede aplicar a sistemas que tienen varias partículas: la energía cinética y el trabajo realizado se pueden sumar sin tener que resolver las fuerzas internas (Problema modelo 13.2). Hay que observar que esta ecuación no proporciona directamente el tiempo de recorrido o la aceleración. Sin embargo, si se conoce el radio de curvatura ρ de la trayectoria de la partícula en el punto donde se ha obtenido la velocidad v , puede expresar la componente normal de la aceleración como $a_n = v^2/\rho$ y obtener la componente normal de la fuerza ejercida sobre la partícula utilizando la segunda ley de Newton.

4. La potencia se presentó en esta sección como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, $P = dU/dt$. La potencia se mide en pies·lb/s o caballos de potencia (hp) en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y J/s o watts (W) en el sistema de unidades del SI. Para calcular la potencia, puede usar la fórmula equivalente,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

donde $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$ denotan la fuerza y la velocidad, respectivamente, en un tiempo determinado (problema modelo 13.7). En algunos problemas (véase, por ejemplo, el problema 13.47) se pedirá la *potencia promedio*, la cual es posible obtener al dividir el trabajo total entre el intervalo durante el cual se efectúa el trabajo.

Problemas*

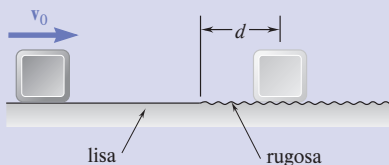


Figura P13.PC1

PREGUNTA CONCEPTUAL

13.PC1 El bloque A está viajando con rapidez v_0 sobre una superficie lisa cuando de repente la superficie se vuelve rugosa con un coeficiente de fricción de μ causando que el bloque se detenga después de una distancia d . Si el bloque A viajara el doble de rápido, esto es, a una rapidez $2v_0$, ¿cuán lejos llegará sobre la superficie rugosa antes de detenerse?

* Las respuestas a todos los problemas cuyo número está en tipo recto (como en 13.1) se presentan al final del libro. No se dan las respuestas a los problemas con números en *italicas* (como en 13.3).

- a) $d/2$
- b) d
- c) $\sqrt{2}d$
- d) $2d$
- e) $4d$

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

13.1 Un satélite de 400 kg se colocó en una órbita circular a 6 394 km sobre la superficie de la Tierra. A esta altitud, la aceleración de la gravedad es de 4.09 m/s^2 . Si se sabe que la rapidez orbital es 20 000 km/h, determine la energía cinética del satélite.

13.2 Una piedra de 0.5 lb se deja caer en una “fosa sin fondo” en las cavernas de Carlsbad y golpea el suelo con una rapidez de 95 pies/s. Ignorando la resistencia del aire, a) determine la energía cinética de la piedra cuando golpea el suelo y la altura h desde la cual se dejó caer. b) Resuelva el inciso a) suponiendo que la misma piedra se deja caer en un hoyo sobre la Luna (aceleración de gravedad en la Luna = 5.31 pies/s^2).

13.3 Un jugador de béisbol golpea una pelota de 5.1 oz con una velocidad inicial de 130 pies/s en un ángulo de 40° con la horizontal como se indica. Determine a) la energía cinética de la pelota inmediatamente después del golpe, b) la energía cinética de la pelota cuando alcanza su altura máxima, c) la altura máxima sobre el suelo que alcanza la pelota.

13.4 Un satélite de comunicaciones de 500 kg está en una órbita geosíncrona circular y completa una revolución alrededor de la Tierra en 23 h y 56 min a una altura de 35 800 km sobre la superficie terrestre. Sabiendo que el radio de la Tierra es de 6 370 km, determine la energía cinética del satélite.

13.5 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. El perol no debe oscilar más de 15° con respecto a la vertical cuando la grúa se detiene en forma súbita. Determine la máxima rapidez v permisible para la grúa.

13.6 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. La grúa se mueve a una rapidez de 8 pies/s cuando se detiene de súbito. Determine la máxima distancia horizontal a través de la cual oscilará el perol.

13.7 Determine la rapidez teórica máxima que puede alcanzar un automóvil en una distancia de 100 m si parte desde el reposo y se sabe que el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento es de 0.8; además, 60% del peso del automóvil se distribuye sobre sus ruedas delanteras y 40% sobre sus ruedas traseras. Suponga a) tracción delantera, b) tracción trasera, c) tracción en las cuatro ruedas.



Figura P13.2

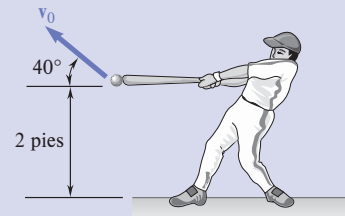


Figura P13.3

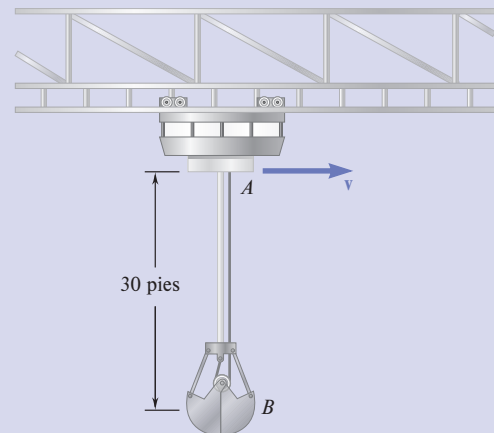


Figura P13.5 y P13.6

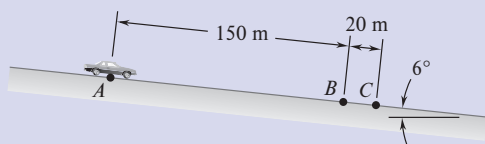


Figura P13.8

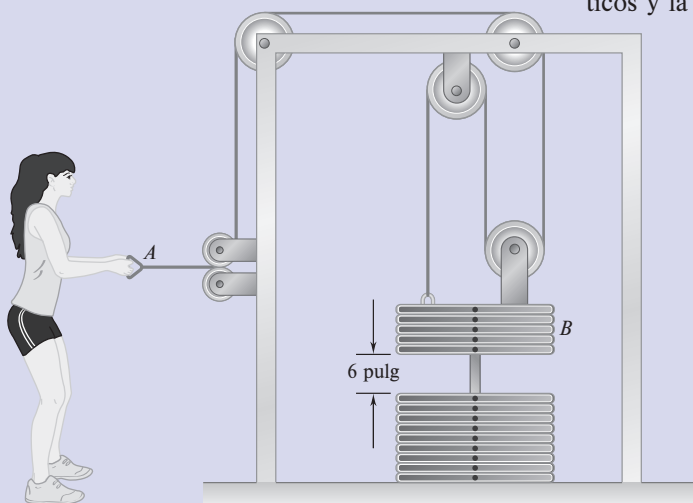


Figura P13.9

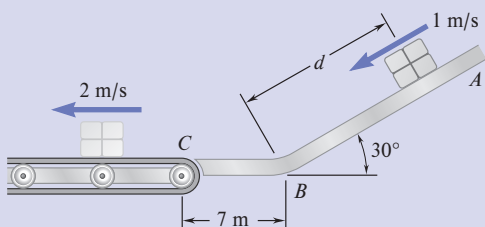


Figura P13.11 y P13.12

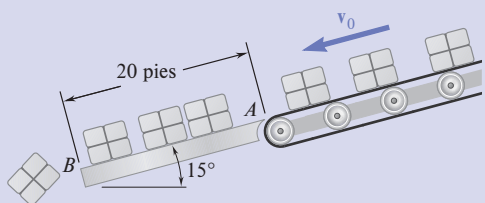


Figura P13.13 y P13.14

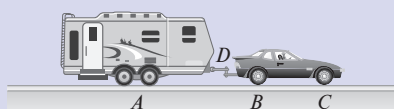


Figura P13.15

13.8 Un automóvil de 2 000 kg arranca a partir de reposo en el punto *A* sobre una inclinación de 6° y recorre una distancia de 150 m hasta el punto *B*. En ese momento se aplican los frenos, que provocan que el automóvil se detenga en el punto *C*, a 20 m del punto *B*. Si se sabe que el deslizamiento es inminente durante el periodo de frenado e ignorando la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento, determine *a*) la rapidez del automóvil en el punto *B*, *b*) el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera.

13.9 Una atleta sostiene un peso de 30 lb a una altura de 6 pulg por encima de la pila de pesas, como se muestra en la figura. Para bajar las pesas, aplica una fuerza constante de 5 lb a la empuñadura. Determine la velocidad de las pesas inmediatamente antes de que toquen la pila.

13.10 Un cohete a escala de 1.4 kg se lanza verticalmente desde el reposo con un empuje constante de 25 N hasta que alcanza una altura de 15 m y el empuje termina. Desprecie la resistencia del aire y determine *a*) la rapidez del cohete cuando termina el empuje, *b*) la altura máxima alcanzada por el cohete, *c*) la rapidez del cohete cuando este regresa a la Tierra.

13.11 Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en *A* con una velocidad de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie *ABC* hacia una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y la superficie *ABC*, determine la distancia *d* si los paquetes deben llegar a *C* con una velocidad de 2 m/s.

13.12 Un paquete se lanza por una pendiente en *A* con una velocidad de 1 m/s. El paquete se desliza a lo largo de la superficie *ABC* hasta una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $d = 6$ m y $\mu_k = 0.2$ entre el paquete y todas las superficies, determine *a*) la rapidez del paquete en *C*, *b*) la distancia que el paquete se deslizará sobre la banda transportadora antes de que se detenga en relación con la banda.

13.13 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad v_0 hasta una pendiente fija en *A* donde se deslizan y al final caen en *B*. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si las cajas dejan la pendiente en *B* con una velocidad de 8 pies/s.

13.14 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad v_0 hasta una pendiente fija en *A* donde se deslizan y al final caen en *B*. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si la velocidad de las cajas en *B* es igual a cero.

13.15 Un tráiler de 1 200 kg es remolcado por un automóvil de 1 400 kg. Los vehículos viajan a 72 km/h cuando el conductor aplica los frenos a ambos. Si se sabe que las fuerzas de frenado ejercidas sobre el automóvil y el tráiler son de 5 000 N y 4 000 N, respectiva-

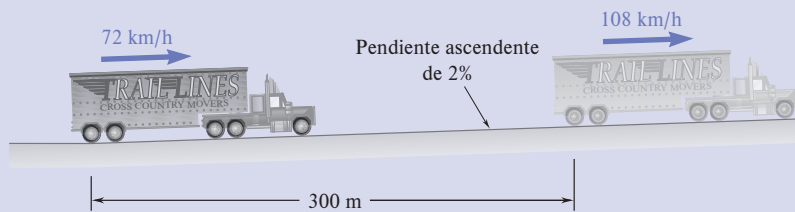


Figura P13.16

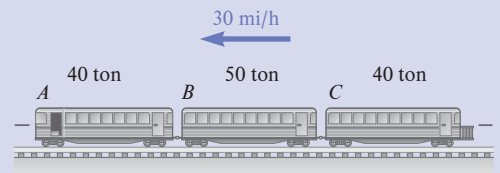
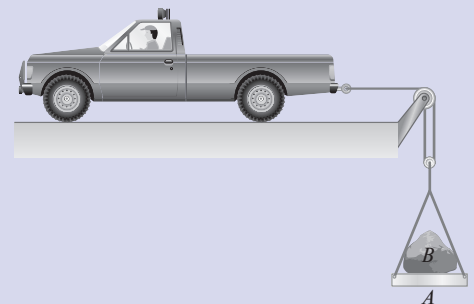


Figura P13.17 y P13.18

mente, determine *a*) la distancia recorrida por el automóvil y el tráiler antes de que se detengan, y *b*) la componente horizontal de la fuerza ejercida por el gancho del tráiler sobre el automóvil.

- 13.16** Un tractocamión ingresa a una pendiente ascendente de 2% mientras viaja a 72 km/h y alcanza una rapidez de 108 km/h en 300 m. La cabina tiene una masa de 1 800 kg y el remolque de 5 400 kg. Determine *a*) la fuerza promedio en las ruedas de la cabina, *b*) la fuerza promedio en el acoplamiento entre la cabina y el remolque.

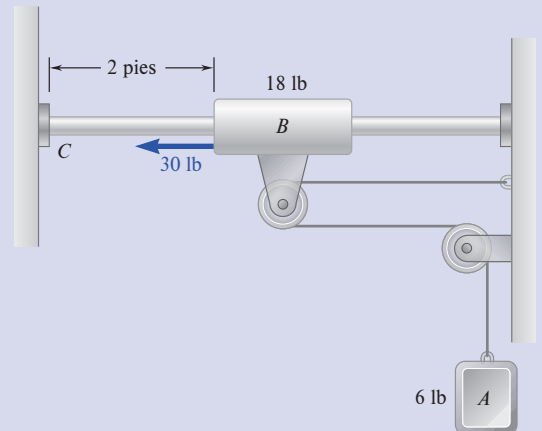
- 13.17** El tren subterráneo que se muestra en la figura viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando se aplican por completo los frenos en las ruedas de los carros *B* y *C*, lo que causa que estos se deslicen sobre la vía, pero los frenos no se aplican en las ruedas del carro *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.35 entre las ruedas y la vía, determine *a*) la distancia requerida para que el tren se detenga, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.



- 13.18** El tren subterráneo que se muestra viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando los frenos se aplican por completo a las ruedas del vagón *A*, causando que este se deslice sobre la vía, pero no se aplica sobre las ruedas de los vagones *B* o *C*. Si se sabe que el coeficiente de fricción es de 0.35 entre las ruedas y la vía, determine *a*) la distancia requerida para detener al tren, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

Figura P13.19

- 13.19** Se utiliza un camión de 5 000 lb para levantar una roca *B* de 1 000 lb que está sobre una paleta *A* de 200 lb. Si se sabe que el camión inicia su movimiento desde el reposo y que la fuerza horizontal entre las llantas y el suelo es de 700 lb, determine la velocidad de la roca después de que el camión se ha movido 6 pies hacia adelante.



- 13.20** El sistema que se muestra en la figura está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 30 lb al collarín *B*. *a*) Si la fuerza actúa a través de todo el movimiento, determine la rapidez del collarín *B* al golpear al soporte en *C*. *b*) ¿Después de qué distancia *d* debería retirarse la fuerza de 30 lb si el collarín debe llegar al soporte *C* con velocidad cero?

Figura P13.20

- 13.21** El automóvil *B* está remolcando al automóvil *A* a una rapidez constante de 10 m/s sobre una pendiente inclinada cuando los frenos del automóvil *A* se aplican completamente ocasionando que las cuatro ruedas patinen. El conductor del automóvil *B* no cambia la aceleración ni la velocidad de engrane. Las masas de los automóviles *A* y *B* son 1 400 y 1 200 kg, respectivamente, y el coeficiente de fricción cinética es 0.8. Ignore la resistencia del aire y la resistencia

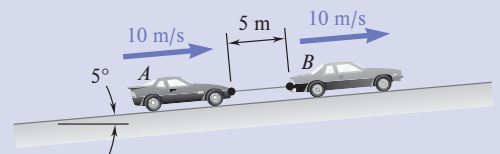


Figura P13.21

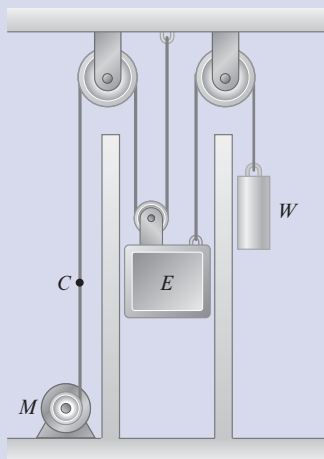


Figura P13.22 y P13.23

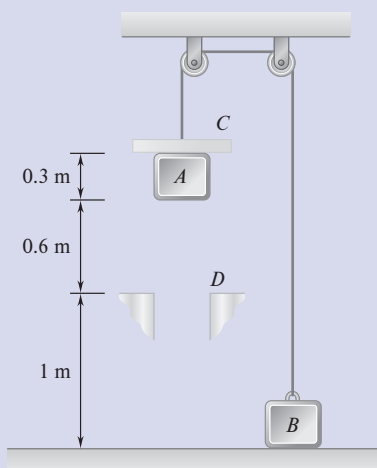


Figura P13.24

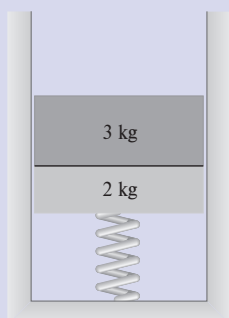


Figura P13.26

del rodamiento y determine *a*) la distancia recorrida por los automóviles antes de que estos se detengan, *b*) la tensión en el cable.

13.22 El motor aplica una fuerza descendente constante $F = 1\,050\text{ lb}$ a un cable, el cual se utiliza para elevar el ascensor E de $4\,000\text{ lb}$ que se muestra en la figura. El contrapeso tiene un peso de $2\,000\text{ lb}$ y el ascensor inicia su movimiento desde el reposo. Después de que el ascensor se desplace 20 pies , determine *a*) la velocidad del ascensor, *b*) la velocidad del contrapeso.

13.23 El motor aplica una fuerza descendente constante F a un cable, el cual se utiliza para elevar el ascensor E de $4\,000\text{ lb}$ que se muestra en la figura. El contrapeso tiene un peso de $2\,000\text{ lb}$. Si se sabe que el ascensor inicia su movimiento desde el reposo y alcanza una rapidez de 3 m/s después de desplazarse 30 pies , determine F .

13.24 Dos bloques A y B , de 4 y 5 kg de masa, respectivamente, están conectados por una cuerda que pasa sobre las poleas en la forma que se muestra en la figura. Un collarín C de 3 kg se coloca sobre el bloque A y el sistema se suelta desde el reposo. Después que los bloques se mueven 0.9 m , se retira el collarín C y los bloques A y B continúan moviéndose. Determine la rapidez del bloque A justo antes de que golpee el suelo.

13.25 Se colocan cuatro paquetes de 15 kg , como se muestra en la figura, sobre una cinta transportadora que está desconectada de su motor de accionamiento. El paquete 1 está justo a la derecha de la parte horizontal del cinturón. Si el sistema se libera desde el reposo, determine las velocidades de los paquetes 1 y 2 cuando caen de la banda en el punto A . Suponga que la masa de la banda y los rodillos es pequeña en comparación con la masa de los paquetes, y que no hay deslizamiento entre los paquetes y la banda.

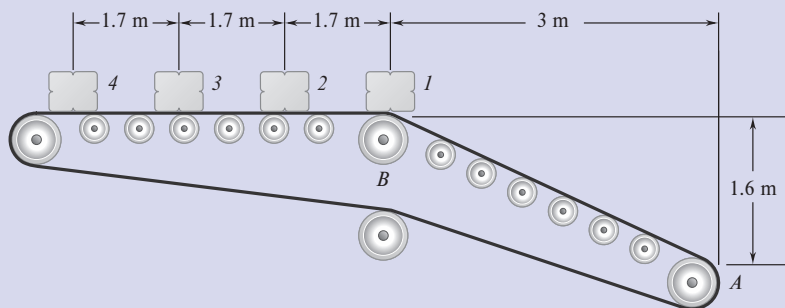
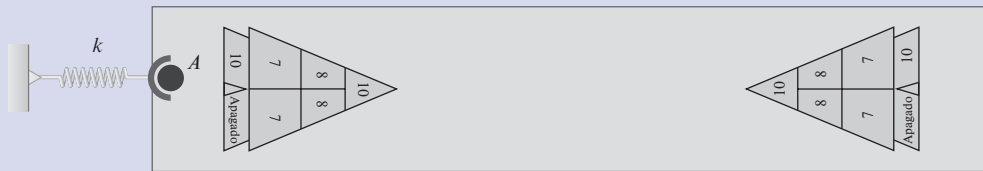


Figura P13.25

13.26 Un bloque de 3 kg descansa sobre la parte superior de un bloque de 2 kg soportado, pero no unido a un resorte con una constante de 40 N/m . El bloque superior se retira de manera repentina. Determine *a*) la rapidez máxima alcanzada por el bloque de 2 kg , *b*) la altura máxima alcanzada por el bloque de 2 kg .

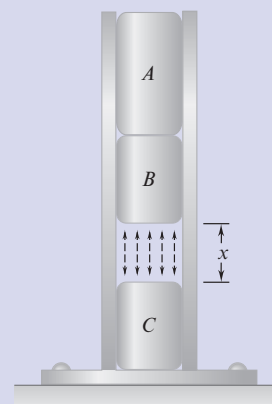
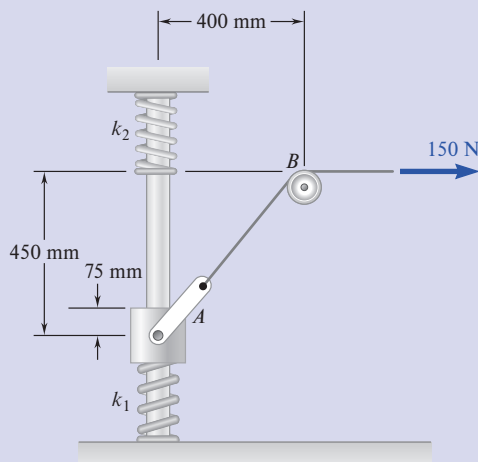
13.27 Retome el problema 13.26, y ahora suponga que el bloque de 2 kg está unido al resorte.

13.28 Las personas con movilidad limitada pueden mejorar su salud y vida social al participar de diversas actividades recreativas. Se debe diseñar un accesorio para un juego de tejos adaptado y accionado por resortes para que puedan utilizarlo personas en sillas de ruedas. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el tejo de 15 onzas y la superficie de



madera es de 0.3, que el desplazamiento máximo del resorte que desea es de 6 pulgadas y que desea que el tejo se desplace al menos a 30 pies/s, determine *a*) la constante k del resorte, *b*) cuánto debe tirar el atleta del resorte para que el tejo entre en reposo después de 34 pies.

- 13.29** Un collarín de 7.5 lb se libera desde el reposo en la posición que se ilustra, se desliza por la varilla inclinada y comprime el resorte. La dirección del movimiento se invierte y el collarín se desplaza hacia arriba sobre la varilla. Si se sabe que la deformación máxima del resorte es 5 pulg, determine *a*) el coeficiente de fricción cinética entre el collarín y la varilla, *b*) la rapidez máxima del collarín.
- 13.30** Un bloque de 10 kg se une a un resorte *A* y se conecta a un resorte *B* mediante una cuerda y una polea. El bloque se sostiene en la posición que se muestra con ambos resortes sin estirar cuando el soporte se remueve y el bloque se suelta sin velocidad inicial. Si se sabe que la constante de cada resorte es 2 kN/m, determine *a*) la velocidad del bloque después de que este ha descendido 50 mm, y *b*) la velocidad máxima alcanzada por el bloque.
- 13.31** Un collarín *A* de 5 kg está en reposo en la parte superior de, pero no unido a, un resorte con una rigidez $k_1 = 400$ N/m cuando una fuerza constante de 150 N se aplica al cable. Puesto que *A* tiene una rapidez de 1 m/s cuando el resorte superior se comprime 75 mm, determine la rigidez del resorte k_2 . Ignore la fricción y la masa de la polea.
- 13.32** Un bloque de latón (no magnético) *A* de 0.75 lb y un imán de acero *B* de 0.5 lb están en equilibrio dentro de un tubo de latón bajo la fuerza magnética de rechazo de otro imán de acero *C* ubicado a una distancia $x = 0.15$ pulg de *B*. La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado



de la distancia entre B y C . Si el bloque A se retira de manera súbita, determine a) la velocidad máxima de B , b) la aceleración máxima de B . Suponga que la resistencia y la fricción del aire son despreciables.

- 13.33** Un automóvil fuera de control que viaja a 65 mi/h golpea en línea perpendicular un amortiguador de impactos de una autopista en el que el automóvil se detiene al aplastar en forma sucesiva los barriles de acero. La magnitud F que se requiere para aplastar los barriles se muestra como una función de la distancia x que el automóvil se ha desplazado dentro de la zona de amortiguamiento. Si se sabe que el automóvil tiene un peso de 2 250 lb y se desprecia el efecto de la fricción, determine a) la distancia que el automóvil se desplazará en el amortiguador antes de detenerse, b) la desaceleración máxima del automóvil.

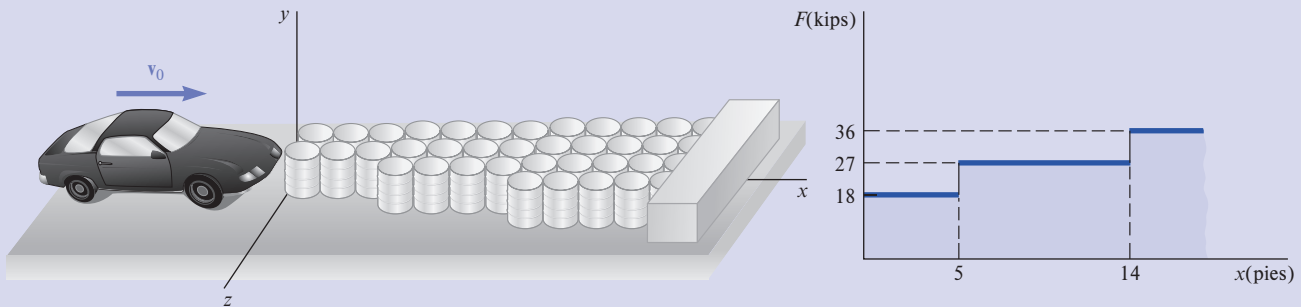


Figura P13.33

- 13.34** Dos tipos de defensas absorbedoras de energía que se diseñan para usarse en un embarcadero se cargan estáticamente. La curva de la fuerza de deflexión de cada tipo de defensa se indica en la gráfica. Determine la deflexión máxima de cada defensa cuando una embarcación de 90 ton que se mueve a 1 mi/h golpea la defensa y queda en reposo.

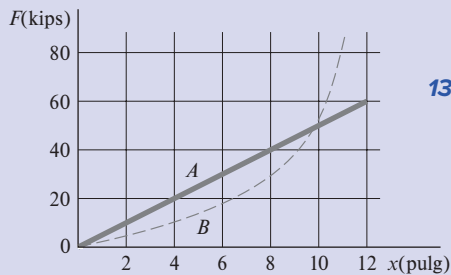


Figura P13.34

- 13.35** Los resortes no lineales se clasifican como duros o suaves, dependiendo de la curvatura de su función fuerza-deflexión (véase la figura). Si un instrumento delicado que tiene una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte de longitud l de manera que su base justo toca el resorte sin deformar y después de manera inadvertida se libera desde esa posición, determine la deflexión máxima x_m del resorte y la fuerza máxima F_m ejercida por el resorte, suponiendo a) un resorte lineal de constante $k = 3$ kN/m, b) un resorte duro, no lineal, para el cual $F = (3 \text{ kN/m})(x + 160x^3)$.

- 13.36** Un meteorito parte desde el reposo a una gran distancia de la Tierra. Si se sabe que el radio de la Tierra es de 6 370 km y sin tener en cuenta todas las fuerzas excepto la atracción gravitacional de la Tierra, determine

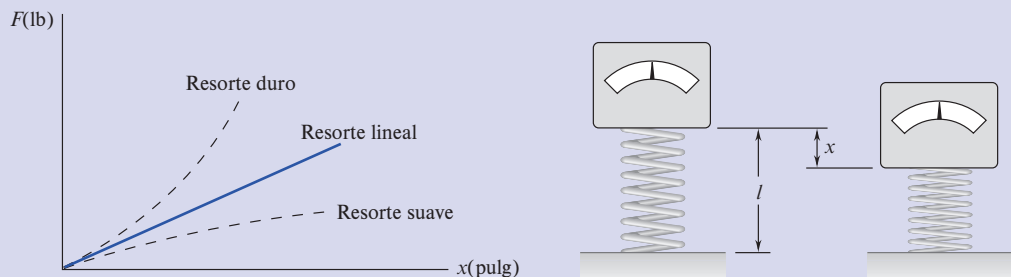


Figura P13.35

la rapidez del meteorito *a*) al entrar en la ionosfera a una altitud de 1 000 km, *b*) al entrar a la estratósfera a una altitud de 50 km, *c*) al chocar con la superficie de la Tierra.

- 13.37** Expresar la aceleración de la gravedad g_h a una altura h sobre la superficie de la Tierra en términos de la aceleración de la gravedad g_0 en la superficie terrestre, la altura h y el radio R de la Tierra. Determine el error porcentual si el peso que un objeto tiene sobre la superficie de la Tierra se usa como su peso a una altura de *a*) 0.625 mi, *b*) 625 mi.

- 13.38** Una pelota de golf golpeada en la Tierra alcanza una altura máxima de 60 m y choca en el suelo a 230 m de distancia. ¿Qué distancia recorrerá la misma pelota en la Luna si la magnitud y dirección de su velocidad son iguales que en la Tierra, inmediatamente después de haber sido golpeada? Suponga que la pelota se golpea y choca con la superficie a la misma altura y que se desprecia el efecto de la atmósfera en la Tierra, de manera que en ambos casos la trayectoria es una parábola. La aceleración de la gravedad en la Luna es 0.165 veces la de la Tierra.

- 13.39** A la esfera en *A* se le da una velocidad hacia abajo v_0 de magnitud igual a 5 m/s y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud $l = 2$ m unida a un soporte en *O*. Determine el ángulo θ al cual se romperá la cuerda, si se sabe que esta puede resistir una tensión máxima igual al doble del peso de la esfera.

- 13.40** A una esfera en *A* se le da una velocidad hacia abajo v_0 y oscila en un círculo vertical de radio l y centro *O*. Determine la velocidad más baja v_0 para la cual la esfera alcanzará el punto *B* cuando esta gire en torno al punto *O* *a*) si *AO* es una cuerda, *b*) si *AO* es una varilla delgada de masa despreciable.

- 13.41** Una bolsa se empuja suavemente desde la cima de una pared en el punto *A* y oscila en el plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud l . Determine el ángulo θ en el que se cortará la cuerda, si se sabe que puede soportar una tensión máxima equivalente al doble del peso de la bolsa.

- 13.42** Un carro de montaña rusa que empieza desde el reposo en *A* rueda hacia abajo por la vía hasta *B*, describe una trayectoria circular de 40 pies de diámetro y se mueve hacia arriba y hacia abajo pasando por el punto *E*. Sabiendo que $h = 60$ pies y suponiendo que no hay pérdidas de energía debido a la fricción, determine *a*) la fuerza ejercida por el asiento en un pasajero de 160 lb en *B* y *D*, *b*) el valor mínimo del radio de curvatura en *E* si el carrito de montaña rusa no va a dejar la vía en ese punto.

- 13.43** En el problema 13.42 determine el intervalo de valores de h para los cuales el carro de montaña rusa no dejará la pista en *D* o *E*, sabiendo que el radio de curvatura en *E* es $\rho = 75$ pies. Suponga que no hay pérdidas de energía debidas a la fricción.

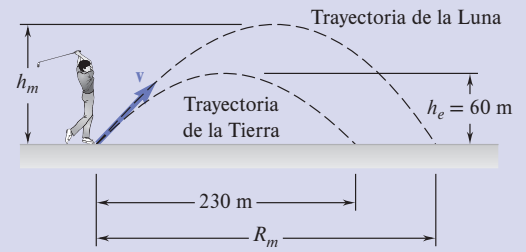


Figura P13.38

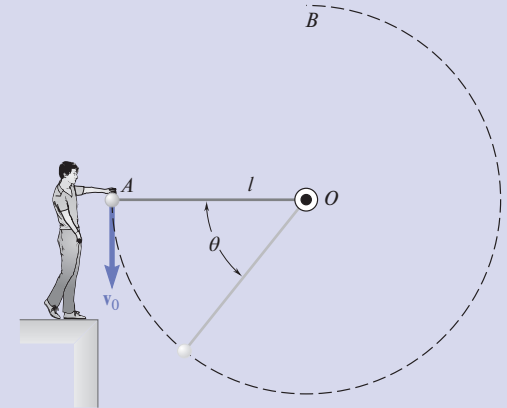


Figura P13.39 y P13.40

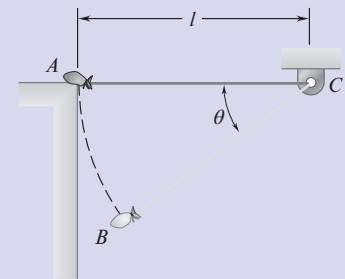


Figura P13.41

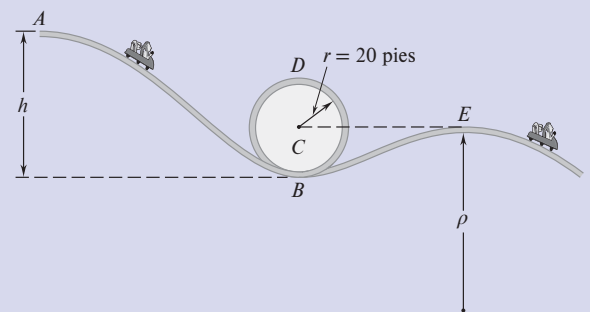


Figura P13.42

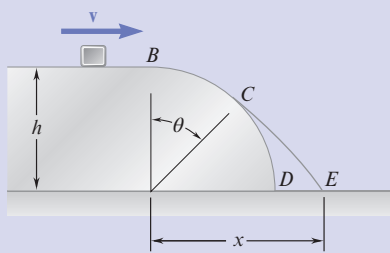


Figura P13.44 y P13.45

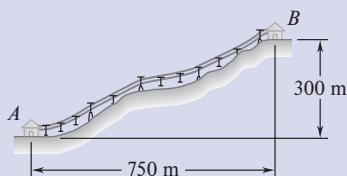


Figura P13.46

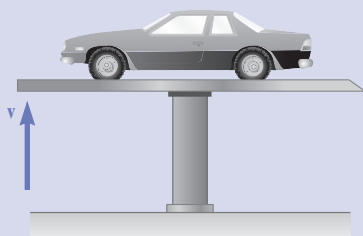


Figura P13.47

13.44 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez v sobre una superficie horizontal. Si sabe que $h = 0.9$ m, determine la rapidez requerida del bloque si este debe dejar la superficie cilíndrica BCD cuando $\theta = 30^\circ$.

13.45 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez $v = 8$ pies/s sobre una superficie horizontal a una altura $h = 3$ pies sobre el suelo. Determine *a*) el ángulo θ al cual el bloque abandonará la superficie cilíndrica BCD , *b*) la distancia x a la cual golpeará el suelo. No tome en cuenta la fricción ni la resistencia del aire.

13.46 Un transportador de sillas está diseñado para trasladar 1 000 esquiadores por hora desde la base A hasta la cumbre B . La masa promedio de un esquiador es de 70 kg y la rapidez promedio del transportador es de 75 m/min. Determine *a*) la potencia promedio requerida, *b*) la capacidad requerida del motor si la eficiencia mecánica es de 85% y se permite una sobrecarga de 300%.

13.47 Se requieren 15 s para levantar un automóvil de 1 200 kg y la plataforma de soporte de 300 kg del elevador de automóviles hidráulico hasta una altura de 2.8 m. Si se sabe que la eficiencia de conversión total de potencia eléctrica en mecánica para el sistema es de 82%, determine *a*) la potencia de salida promedio entregada por la bomba hidráulica para elevar el sistema, *b*) la potencia eléctrica promedio que se requiere.

13.48 La velocidad del elevador del problema 13.47 aumenta de manera uniforme desde cero hasta su valor máximo en 7.5 s y después disminuye uniformemente hasta cero en 7.5 s. Si se sabe que la salida de potencia máxima de la bomba hidráulica es de 6 kW cuando la velocidad es máxima, determine la fuerza de elevación máxima proporcionada por la bomba.

13.49 *a*) Una mujer de 120 lb conduce una bicicleta de 15 lb hacia arriba por una pendiente de 3% a una rapidez constante de 5 pies/s. ¿Cuánta potencia debe generar la mujer? *b*) Un hombre de 180 lb sobre una bicicleta de 18 lb empieza a desplazarse hacia abajo por la misma pendiente y mantiene una rapidez constante de 20 pies/s accionando los frenos. ¿Cuánta potencia disipan los frenos? No tome en cuenta la resistencia del aire ni la resistencia al rodamiento.

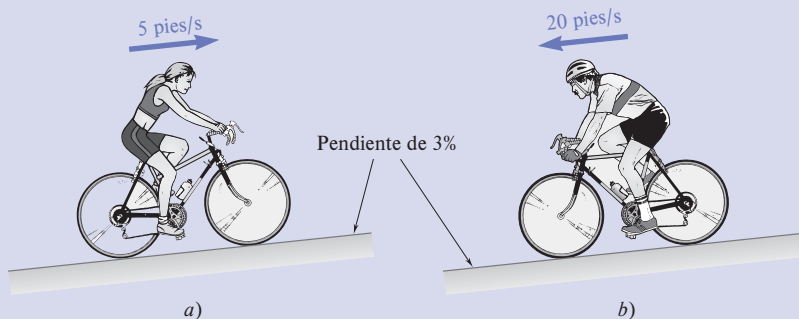


Figura P13.49

13.50 Se va a deducir una fórmula para especificar la potencia de un motor eléctrico que acciona una banda transportadora que mueve material sólido a diferentes velocidades y a distintas alturas y distancias. Si se denota la eficiencia de los motores mediante η y no se toma en cuenta la poten-

cia que se necesita para accionar la propia banda, obtenga una fórmula
a) en el sistema de unidades del SI, para la potencia P en kW, en términos de la tasa del flujo de masa m en kg/h, la altura b y la distancia horizontal l en metros, y b) en unidades de uso común en Estados Unidos, para la potencia en hp, en términos de la razón de flujo de masa w en ton/h y la altura b y la distancia horizontal l en pies.

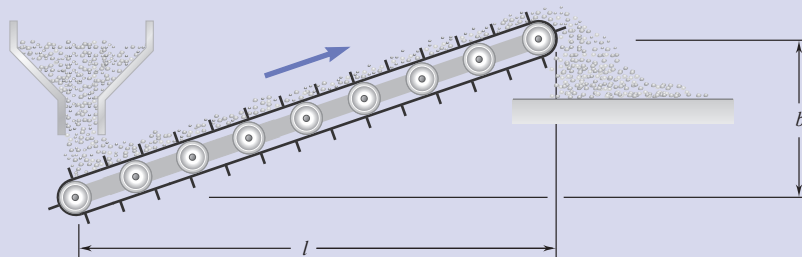


Figura P13.50

- 13.51** Un automóvil de 1 400 kg arranca desde el reposo y recorre 400 m durante una prueba de desempeño. El movimiento del automóvil está definido por la relación $x = 4\,000 \ln(\cosh 0.03t)$, donde x y t están expresados en metros y segundos, respectivamente. La magnitud de la resistencia aerodinámica es $D = 0.35v^2$, donde D y v están expresados en newtons y m/s, respectivamente. Determine la potencia disipada por la resistencia aerodinámica cuando a) $t = 10$ s, b) $t = 15$ s.
- 13.52** Se sabe que la resistencia a la fricción de un barco varía directamente con un factor de 1.75 de la potencia de la rapidez v del barco. Un solo remolcador a plena potencia puede remolcar el barco a una rapidez constante de 4.5 km/h ejerciendo una fuerza constante de 300 kN. Determine a) la potencia entregada por el remolcador, b) la rapidez máxima a la que dos remolcadores pueden remolcar el barco, si cada uno de ellos es capaz de entregar la misma potencia.
- 13.53** La transmisión hidráulica de un camión de 15 Mg permite que el motor proporcione una potencia constante de 50 kW a las ruedas con tracción. Determine el tiempo necesario y la distancia recorrida a medida que la rapidez del camión incrementa a) de 36 km/h a 54 km/h, b) de 54 km/h a 72 km/h.
- 13.54** El elevador E tiene una masa de 6 600 lb cuando está completamente cargado y se conecta como se muestra a un tambor W de 2 200 lb de masa. Determine la potencia en hp que entrega el motor a) cuando el elevador se mueve hacia abajo a una rapidez constante de 1 pie/s, b) cuando tiene una velocidad hacia arriba de 1 pie/s y una desaceleración de 0.18 pie/s².

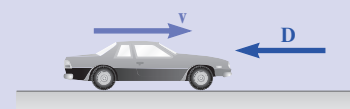


Figura P13.51

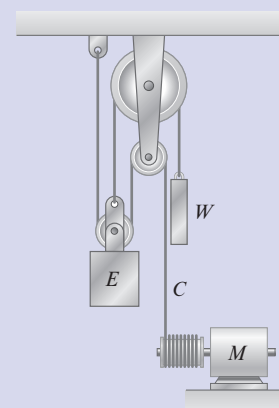


Figura P13.54

13.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

El principio del trabajo y la energía resulta útil para resolver diversos tipos de problemas de ingeniería. Sin embargo, en muchas aplicaciones de ingeniería, la energía mecánica total se mantiene constante, aunque puede transformarse de una forma a otra. Esto se conoce como el principio de conservación de la energía. Para formular

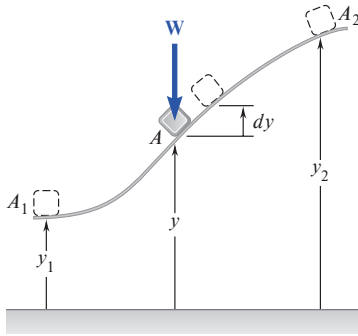


Figura 13.4 (repetida).

este principio, primero se debe definir una cantidad conocida como energía potencial. (Parte de este material ya se consideró en la sección 10.2B).

13.2A Energía potencial

Considere de nuevo un cuerpo de peso W que se mueve a lo largo de una trayectoria curva desde un punto A_1 de elevación y_1 hasta un punto A_2 de elevación y_2 (figura 13.4). En la sección 13.1A se estudió que el trabajo de la fuerza de gravedad W durante este desplazamiento es

$$U_{1 \rightarrow 2} = -(Wy_2 - Wy_1) = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

El trabajo de W puede obtenerse entonces al restar el valor de la función Wy , correspondiente a la segunda posición del cuerpo, del valor que corresponde a su primera posición. El trabajo de W es independiente de la trayectoria real seguida; depende solo de los valores inicial y final de la función Wy . Esta función recibe el nombre de **energía potencial** del cuerpo respecto a la **fuerza de gravedad W** , y se denota mediante V_g . Se escribe

Energía potencial gravitacional de la Tierra

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \quad \text{donde} \quad V_g = Wy \quad (13.16)$$

donde y se mide desde un plano de referencia horizontal arbitrario donde la energía potencial es cero por definición. Se observa que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, **si la energía potencial aumenta** durante el desplazamiento (como en el caso considerado aquí), **el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es negativo**. Si, por otro lado, el trabajo de W es positivo, disminuye la energía potencial. Por tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del trabajo que puede realizarse mediante su peso W . Puesto que en la fórmula (13.16) únicamente está implicado el *cambio* en la energía potencial, y no el valor real de V_g , puede agregarse una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g . En otras palabras, el nivel de referencia desde el cual es medida la elevación y se puede elegir de manera arbitraria. Advierta que la energía potencial se expresa en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se emplean unidades del SI y en pies-lb o pulg-lb si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos.

Hay que observar que la expresión que se acaba de obtener para la energía potencial de un cuerpo con respecto a la gravedad solo es válida mientras es posible suponer que el peso W del cuerpo permanece constante. Esto es, siempre y cuando los desplazamientos del cuerpo sean pequeños comparados con el radio de la Tierra. Sin embargo, en el caso de un vehículo espacial debemos tomar en consideración la variación de la fuerza de la gravedad con la distancia r desde el centro de la Tierra. Con base en la expresión que se obtuvo en la sección 13.1A para el trabajo de una fuerza gravitacional, se escribe (figura 13.6)

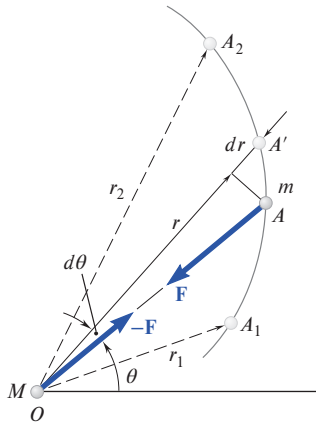


Figura 13.6 (repetida).

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

El trabajo de la fuerza de gravedad puede entonces obtenerse al sustraer el valor de la función $-GMm/r$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. En consecuencia, la expresión que debe usarse para la energía potencial V_g cuando la variación en la fuerza de la gravedad no puede ignorarse es

Energía potencial gravitacional en el espacio

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$$

Si se toma en cuenta la primera de las ecuaciones (12.27), se escribe V_g en la forma alternativa

$$V_g = -\frac{WR^2}{r} \quad (13.17')$$

donde R es el radio de la Tierra y W es el valor del peso del cuerpo en la superficie terrestre. Cuando cualquiera de las relaciones en las ecuaciones (13.17) o (13.17') se usa para expresar V_g , la distancia r debe, desde luego, medirse desde el centro de la Tierra.[†] Advierta que V_g siempre es negativa y que se aproxima a cero para valores muy grandes de r .

Considere ahora un cuerpo unido a un resorte y que se mueve de una posición A_1 , correspondiente a una deformación x_1 del resorte, a una posición A_2 , correspondiente a una deformación x_2 del resorte (figura 13.5). Recuerdese de la sección 13.1A que el trabajo de la fuerza F ejercida por el resorte sobre el cuerpo es

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

El trabajo de la fuerza elástica se obtiene de tal modo al sustraer el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Esta función se denota mediante V_e y se denomina la **energía potencial** del cuerpo con respecto a la **fuerza elástica F**. Se escribe

Energía potencial elástica

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \quad \text{donde} \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$$

Entonces, $x = L_{\text{estirado}} - L_{\text{sin estirar}}$, o la deformación del resorte desde su posición sin deformación. Se observa que durante el desplazamiento de A_1 a A_2 , el trabajo de la fuerza F ejercido por el resorte sobre el cuerpo es negativo y que aumenta la energía potencial V_e , es posible utilizar la fórmula (13.18) incluso cuando el resorte se gira alrededor de su extremo fijo (figura 13.10a). El trabajo de la fuerza elástica depende únicamente de las deformaciones inicial y final del resorte (figura 13.10b).

Es posible recurrir al concepto de energía potencial cuando están implicadas fuerzas diferentes a las de la gravedad y elásticas. En realidad, sigue siendo válido siempre que el trabajo de la fuerza considerada sea independiente de la trayectoria seguida por su punto de aplicación cuando este punto se mueve de una posición dada A_1 a una posición dada A_2 . Este tipo de fuerzas se dice que son **fuerzas conservativas** o **fuerzas independientes de la trayectoria**; las propiedades generales de las fuerzas conservativas se estudian en la siguiente sección.

*13.2B Fuerzas conservativas

Como se indica en la sección anterior, se dice que una fuerza F que actúa sobre una partícula A es **conservativa** si su trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es independiente de una trayectoria seguida por la partícula A mientras se desplaza de A_1 a A_2 (figura 13.11a). Entonces, se obtiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = -[(V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1))] = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \quad (13.19)$$

o, en forma resumida,

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

La función $V(x, y, z)$ recibe el nombre de energía potencial, o **función potencial** de F .

[†] Las expresiones dadas para V_g en las ecuaciones (13.17) y (13.17') son válidas solo cuando $r \geq R$, esto es, cuando el cuerpo considerado está sobre la superficie de la Tierra.

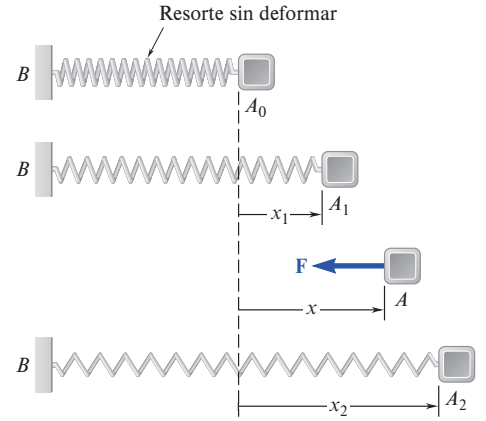


Figura 13.5 (repetida).

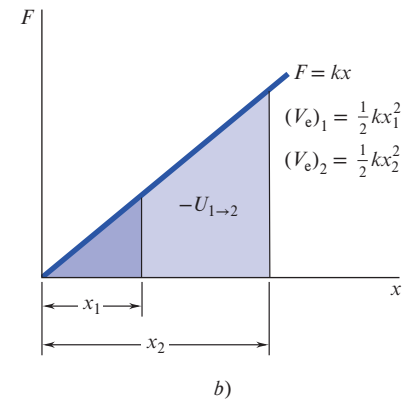
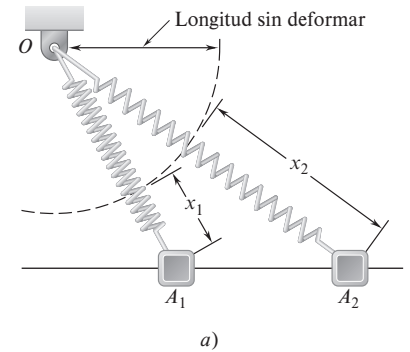


Figura 13.10 a) La ecuación para obtener la energía potencial de la fuerza de un resorte es válida si el resorte se estira cuando gira alrededor de su extremo fijo; b) el trabajo de la fuerza elástica depende únicamente de las deformaciones inicial y final del resorte.

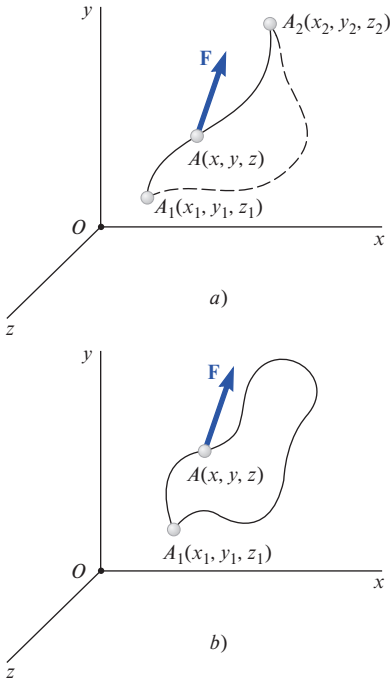


Figura 13.11 a) El trabajo de una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula es independiente de la trayectoria de la partícula; b) si la partícula recorre una trayectoria cerrada, el trabajo de la fuerza conservativa es cero.

Note que si A_2 se elige para coincidir con A_1 , esto es, si la partícula describe una trayectoria cerrada (figura 13.11b), $V_1 = V_2$ y el trabajo es cero. De tal modo, es posible escribir para una fuerza conservativa $\mathbf{F}$

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (13.20)$$

donde el círculo sobre el signo integral indica que la trayectoria es cerrada.

Al aplicar ahora (13.19) entre dos puntos vecinos $A(x, y, z)$ y $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$, el trabajo elemental dU correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ de A a A' es

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

o

$$dU = -dV(x, y, z) \quad (13.21)$$

Así, el trabajo elemental de una fuerza conservativa es una **diferencial exacta**.

Al sustituir para dU en la ecuación (13.21) la expresión que se obtuvo en la ecuación (13.1") y recordar la definición de la diferencial de una función de varias variables, se escribe

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

de la cual se sigue que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (13.22)$$

Es claro que las componentes de $\mathbf{F}$ deben ser funciones de las coordenadas x, y y z . En consecuencia, una condición necesaria para una fuerza conservativa es que esta solo depende de la posición de su punto de aplicación. Las relaciones en la ecuación (13.22) pueden expresarse de manera más concisa si se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}\right)$$

El vector entre paréntesis se conoce como el **gradiente de la función escalar** V y se denota por **grad** V . Se escribe entonces para cualquier fuerza conservativa

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V \quad (13.23)$$

Las relaciones de las ecuaciones (13.19), (13.20), (13.21), (13.22) y (13.23) serán satisfechas por cualquier fuerza conservativa. También se mostró que si una fuerza $\mathbf{F}$ satisface una de estas relaciones, $\mathbf{F}$ debe ser una fuerza conservativa.

13.2C El principio de conservación de la energía

En las dos secciones anteriores se ha visto que el trabajo de una fuerza conservativa, tal como el peso de una partícula o la fuerza ejercida por un resorte, puede expresarse como un cambio en la energía potencial. Cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo y la energía enunciado en la sección 13.1B puede expresarse en forma modificada. Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de la ecuación (13.19') en la ecuación (13.10), se escribe

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

o

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

La fórmula (13.24) indica que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, **la suma de la energía cinética y de la energía potencial de la partícula**

permanece constante. La suma $T + V$ se denomina la **energía mecánica total** de la partícula y se denota por medio de E . Hasta ahora, se habló de dos tipos de energía potencial: la energía potencial gravitacional, V_g , y la energía potencial elástica, V_e . Por tanto, otra manera de escribir la ecuación (13.24) es

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + V_{g2} + V_{e2} \quad (13.24')$$

Considere, por ejemplo, el péndulo que se analizó en la sección 13.1C, el cual se suelta sin velocidad desde A_1 y se permite que se balancee en un plano vertical (figura 13.12). Al medir la energía potencial desde el nivel de A_2 , es decir, colocando el plano de referencia en A_2 , hay, en A_1 ,

$$T_1 = 0 \quad V_1 = Wl \quad T_1 + V_1 = Wl$$

Al recordar que en A_2 la rapidez del péndulo es $v_2 = \sqrt{2gl}$, se tiene

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} (2gl) = Wl \quad V_2 = 0$$

$$T_2 + V_2 = Wl$$

Se verifica de ese modo que la energía mecánica total $E = T + V$ del péndulo es la misma en A_1 y en A_2 . En tanto que la energía es enteramente potencial en A_1 , esta se vuelve por completo cinética en A_2 , y cuando el péndulo se mantiene oscilando hacia la derecha y pasa A_2 , la energía cinética se transforma de nuevo en energía potencial. En A_3 , $T_3 = 0$ y $V_3 = Wl$.

Puesto que la energía mecánica total del péndulo permanece constante y debido a que la energía potencial depende exclusivamente de su elevación, la energía cinética del péndulo tendrá el mismo valor en cualesquiera dos puntos ubicados al mismo nivel. De tal manera, la rapidez del péndulo es la misma en A y en A' (figura 13.12). Este resultado puede extenderse al caso de una partícula que se mueve a lo largo de cualquier trayectoria determinada, independientemente de la forma de la trayectoria, siempre y cuando las únicas fuerzas que actúen sobre la partícula sean su peso y la reacción normal de la trayectoria. La partícula de la figura 13.13, por ejemplo, la cual desliza sobre un plano vertical a lo largo de una pista sin fricción, tendrá la misma rapidez en A , A' y A'' .

Si bien el peso de una partícula y la fuerza ejercida por un resorte son fuerzas conservativas, **las fuerzas de fricción son fuerzas no conservativas o dependientes de la trayectoria.** En otras palabras, *el trabajo de la fuerza de fricción no puede expresarse como un cambio en la energía potencial.* El trabajo de la fuerza de fricción depende de la trayectoria seguida por su punto de aplicación, y mientras el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ definido por la ecuación (13.19) es positivo o negativo de acuerdo con el sentido de movimiento, el trabajo de una fuerza de fricción, como se señaló en la sección 13.1C, siempre es negativo. Hay que concluir que cuando un sistema mecánico implica fricción, su energía mecánica total no permanece constante, sino que disminuye. Sin embargo, la energía del sistema no se pierde; se transforma en calor, y la suma de la *energía mecánica* y de la *energía térmica* del sistema permanece constante.

Otras formas de energía también pueden estar implicadas en un sistema. Por ejemplo, un generador convierte energía mecánica en *energía eléctrica*; un motor a gasolina convierte *energía química* en energía mecánica; un reactor nuclear convierte *masa* en energía térmica. Si se toman en cuenta todas las formas de energía, la energía de cualquier sistema puede considerarse como constante y el principio de conservación de la energía sigue siendo válido bajo todas las condiciones.

Si se expresa el trabajo realizado por fuerzas no conservativas como $U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}}$, es posible expresar la ecuación (13.2) como

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g2} + V_{e2} \quad (13.24'')$$

Obsérvese que si $U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}}$ es cero, la expresión se reduce a la ecuación de conservación de la energía (13.24').

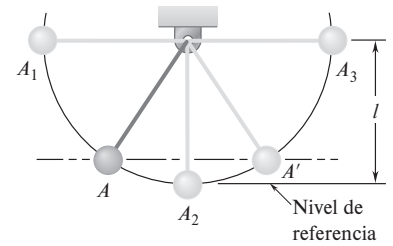


Figura 13.12 El movimiento de un péndulo se analiza fácilmente mediante la conservación de la energía.

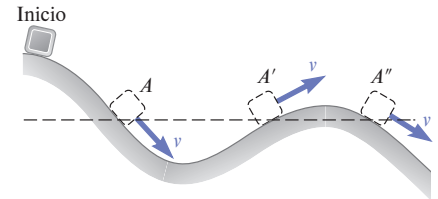


Figura 13.13 Una partícula que se desliza por una pista sin fricción tiene la misma rapidez cada vez que pasa por la misma elevación.



Fotografía 13.2 La energía potencial del carro de la montaña rusa se convierte en energía cinética al descender por las vías.

©Dynamic Graphics Value/SuperStock



Fotografía 13.3 Una vez en órbita, los satélites terrestres se mueven por acción de la gravedad, que actúa como fuerza central.

©iLexx/Getty Images

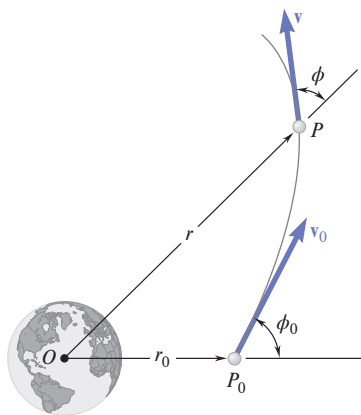


Figura 13.14 Un vehículo espacial que se desplaza de P_0 a P bajo la fuerza gravitacional de la Tierra.

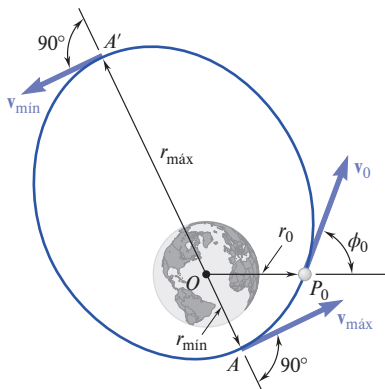


Figura 13.15 Un vehículo espacial se lanza desde el punto P_0 a una órbita alrededor de la Tierra.

13.2D Aplicación a la mecánica celeste: movimiento bajo una fuerza central conservativa

En la sección 12.2B se analizó que cuando una partícula P se mueve bajo la acción de una fuerza central $\mathbf{F}$, la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula alrededor del centro de fuerza O es constante. Si la fuerza $\mathbf{F}$ es también conservativa, existe ahí una energía potencial V asociada con $\mathbf{F}$, y la energía total $E = T + V$ de la partícula es constante. Así, cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central conservativa, tanto el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular como el principio de conservación de la energía pueden utilizarse para estudiar su movimiento.

Considere, por ejemplo, un vehículo espacial de masa m que se mueve bajo la fuerza gravitacional de la Tierra. Suponga que inicia su vuelo libre en el punto P_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra, con una velocidad $\mathbf{v}_0$ formando un ángulo ϕ_0 con el radio vector OP_0 (figura 13.14). Sea P un punto de la trayectoria descrita por el vehículo; denote por r la distancia de O a P , por $\mathbf{v}$ la velocidad del vehículo en P , y por ϕ el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y el radio vector OP . Al aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de O entre P_0 y P (sección 12.2B), se escribe

$$r_0 m v_0 \sin \phi_0 = r m v \sin \phi \quad (13.25)$$

Al recordar la expresión en la ecuación (13.17) que se obtuvo para la energía potencial debida a una fuerza gravitacional, se aplica el principio de conservación de la energía entre P_0 y P y se escribe

$$T_0 + V_0 = T + V$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.26)$$

donde M es la masa de la Tierra.

La ecuación (13.26) puede resolverse para la magnitud v de la velocidad del vehículo en P cuando se conoce la distancia r de O a P ; es posible entonces utilizar la ecuación (13.25) para determinar el ángulo ϕ que forma la velocidad con el radio vector OP .

Las ecuaciones (13.25) y (13.26) también se emplean para determinar los valores máximo y mínimo de r en el caso de un satélite lanzado desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 (figura 13.15). Los valores deseados de r se obtienen haciendo $\phi = 90^\circ$ en (13.25) y eliminando v entre las ecuaciones (13.25) y (13.26).

Debe notarse que la aplicación de los principios de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular conducen a una formulación más fundamental de los problemas de la mecánica celeste que con el método indicado en la sección 12.3B. En todos los casos que implican lanzamientos oblicuos, también producirá cálculos mucho más simples. Y si bien es necesario usar el método de la sección 12.3B cuando se va a determinar la trayectoria real o el periodo orbital del vehículo espacial, los cálculos se simplificarán si se usan primero los principios de conservación para calcular los valores máximo y mínimo del radio vector r .

Problema modelo 13.8

Un collarín de 20 lb desliza sin fricción a lo largo de una varilla vertical en la forma que se indica. El resorte unido al collarín tiene una longitud no deformada

(continúa)

de 4 pulg y una constante de 3 lb/pulg. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición 1, determine su velocidad después de que se ha movido 6 pulg hasta la posición 2.

ESTRATEGIA: Se dan dos posiciones y se desea determinar la velocidad del collarín. Hay fuerzas no conservativas, por lo que se debe utilizar la conservación de energía.

MODELAR: Para el sistema, seleccionar el collarín y el resorte. Se puede tratar el collarín como una partícula. Dibuje el sistema en las posiciones 1 y 2, y defina su punto de referencia.

ANALIZAR: Conservación de la energía. Al aplicar el principio de conservación de la energía entre las posiciones 1 y 2 se obtiene

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}$$

Se debe determinar la energía cinética y potencial en estas posiciones.

Posición 1. Energía potencial. El alargamiento del resorte (figura 1) es

$$x_1 = 8 \text{ pulg} - 4 \text{ pulg} = 4 \text{ pulg}$$

y se tiene

$$V_{e_1} = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} (3 \text{ lb/pulg}) (4 \text{ pulg})^2 = 24 \text{ pulg}\cdot\text{lb} = 2 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene $V_{g_1} = 0$.

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición 1 es cero, $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial. El alargamiento del resorte es

$$x_2 = 10 \text{ pulg} - 4 \text{ pulg} = 6 \text{ pulg}$$

y se tiene

$$V_{e_2} = \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} (3 \text{ lb/pulg}) (6 \text{ pulg})^2 = 54 \text{ pulg}\cdot\text{lb} = 4.5 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

$$V_{g_2} = W y_2 = (20 \text{ lb}) (-6 \text{ pulg}) = -120 \text{ pulg}\cdot\text{lb} = -10 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

Energía cinética

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \frac{20}{32.2} v_2^2 = 0.311 v_2^2$$

Conservación de la energía. Al sustituir en la ecuación (1) se escribe

$$\begin{aligned} T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} &= T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \\ 0 + 0 + 2 \text{ pies}\cdot\text{lb} &= 0.311 v_2^2 + (-10 \text{ pies}\cdot\text{lb}) + (4.5 \text{ pies}\cdot\text{lb}) \\ v_2 &= \pm 4.91 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

$$v_2 = 4.91 \text{ pies/s} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Si no se hubiera incluido el resorte en su sistema, habría sido necesario tratarlo como una fuerza externa; por tanto, se debería haber determinado el trabajo. De manera similar, si hubiera existido fricción actuando sobre el collarín habría sido necesario utilizar el principio más general de trabajo-energía para resolver el problema. Resulta que el trabajo que realiza la fricción no es sencillo de calcular porque la fuerza normal depende de la fuerza del resorte.

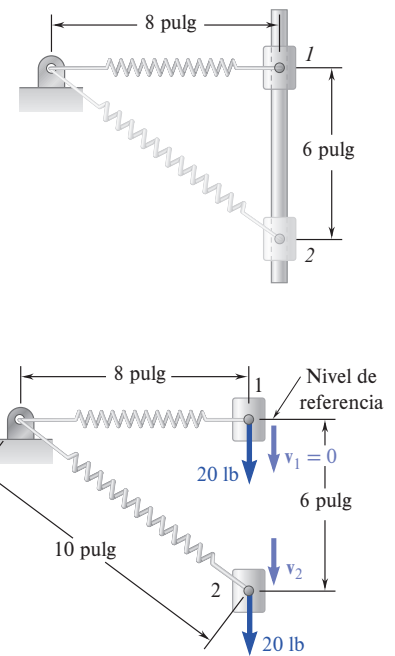


Figura 1 El sistema en la posición 1 y en la posición 2.

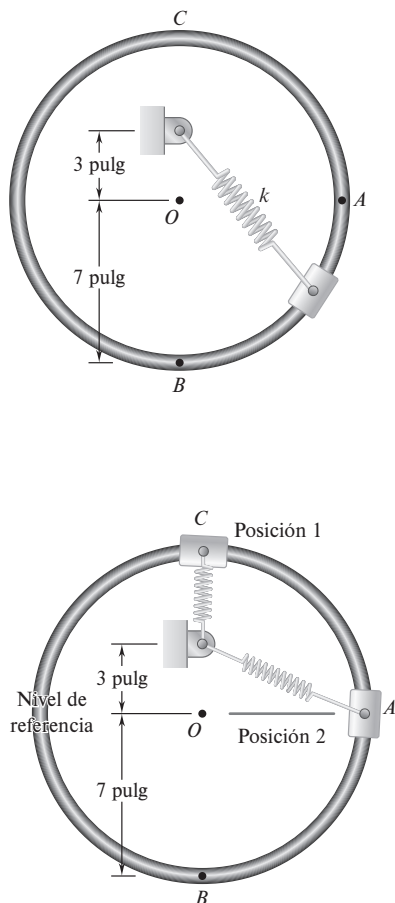


Figura 1 El sistema en las dos posiciones de interés.

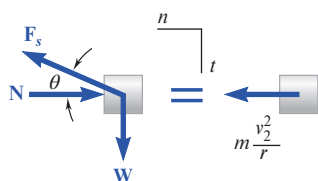


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético para el collarín en el punto A.

Problema modelo 13.9

Un collarín de 2.5 lb se conecta a un resorte y se desliza por una varilla circular lisa en un plano vertical. El resorte tiene una longitud sin deformación de 4 pulg y una constante k . El collarín está en reposo en el punto C y se lo empuja suavemente hacia la derecha. Si se sabe que la velocidad máxima del collarín se alcanza cuando este pasa por el punto A, determine *a*) la constante k del resorte, *b*) la fuerza ejercida por la varilla sobre el collarín en el punto A.

ESTRATEGIA: Dado que se cuenta con dos posiciones e información acerca de la rapidez, utilizar la conservación de la energía. Para hallar la fuerza, se debe utilizar la segunda ley de Newton.

MODELAR: Para la parte del problema que se refiere a la conservación de la energía, modelar el collarín como una partícula y usarla junto con el resorte como sistema. Al emplear la segunda ley de Newton, utilizar el collarín como sistema.

ANALIZAR: Conservación de la energía. La posición 1 es cuando el collarín está en el punto C y la posición 2 es cuando está en el punto A (figura 1).

Al aplicar la conservación de la energía entre las posiciones 1 y 2 se obtiene

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} = T_2 + V_{g2} + V_{e2} \quad (1)$$

Posición 1. Dado que el sistema arranca desde el reposo, $T_1 = 0$ y dado que el resorte tiene una longitud sin deformación de 4 pulg, se sabe que $V_{e1} = 0$. Al colocar el nivel de referencia en el punto A se obtiene

$$V_{g1} = (2.5 \text{ lb})(7/12 \text{ pies}) = 1.4583 \text{ pies} \cdot \text{lb}$$

Posición 2. Para la geometría, la distancia que hay desde el perno A es $\sqrt{(3 \text{ pulg})^2 + (7 \text{ pulg})^2} = 7.616 \text{ pulg}$. Por tanto, la elongación del resorte lineal (figura 1) es $x_2 = 7.616 \text{ pulg} - 4 \text{ pulg} = 3.616 \text{ pulg} = 0.3013 \text{ pies}$. Se sabe que $V_{g2} = 0$ porque el nivel de referencia está en la posición 2. También se sabe que

$$V_{e2} = \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k (0.3013 \text{ pies})^2 = 0.04539k$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2.5 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) v_2^2 = 0.03882 v_2^2$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (1) se obtiene

$$0 + 1.4585 + 0 = 0.03882 v_2^2 + 0 + 0.04539k \quad (2)$$

Se tienen dos incógnitas en esta ecuación, por lo que se requiere otra ecuación. En el enunciado del problema también se indica que el collarín tiene una velocidad máxima en A. Por tanto, la aceleración tangencial debe ser cero en A, y se debe utilizar la segunda ley de Newton para obtener ecuaciones adicionales. El sistema ahora incluye solamente el collarín, el resorte aplica una fuerza externa al sistema. La figura 2 ilustra un diagrama de cuerpo libre y un diagrama cinético del collarín en la posición 2. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección t se obtiene

$$+\downarrow \Sigma F_t = 0 = -k x_2 \sin \theta + W \quad \text{o} \quad -k(0.3013 \text{ pies})(3/7.616) + 2 \text{ lb} = 0$$

Resolver para hallar k ,

$$k = 16.85 \text{ lb/pies} \quad \blacktriangleleft$$

(continúa)

Fuerza ejercida por la varilla. Al sustituir este valor de k en la ecuación (2) se obtiene $v_2 = 3.597$ pies/s. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección n se obtiene

$$\pm \Sigma F_n = m \frac{v_2^2}{r} \quad kx_2 \cos \theta - N = \frac{mv_2^2}{r}$$

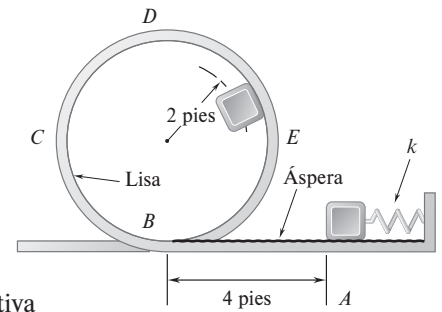
Al resolver para hallar N y sustituir los valores,

$$\begin{aligned} N &= kx_2 \cos \theta - \frac{mv_2^2}{r} \\ &= (16.85 \text{ lb/pies})(0.3013 \text{ pies})(7/7.616) - \frac{(2.5 \text{ lb}/32.2 \text{ pies/s}^2)(3.597 \text{ pies/s}^2)}{(7/12 \text{ pies})} \\ N &= 4.19 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

REVISAR y PENSAR: Cuando el collarín se empuja hacia la izquierda, su rapidez aumenta hasta llegar al punto A y, luego, comienza a disminuir. La rapidez mínima se da cuando el collarín está en el punto B , dado que las únicas fuerzas están en la dirección normal; es decir, que no hay ninguna fuerza actuando en dirección tangencial. Por tanto, la aceleración en la dirección tangencial es cero, lo que indica la rapidez mínima.

Problema modelo 13.10

Un objeto de 0.5 lb se empuja contra el resorte en el punto A y se libera desde el reposo. Se desplaza 4 pies sobre una superficie horizontal áspera hasta llegar a un aro liso. El coeficiente de fricción cinética sobre la superficie horizontal áspera es de $\mu_k = 0.3$ y el resorte tiene una compresión inicial de 0.25 pies. Determine la constante mínima del resorte k por la que el objeto se desplazará por el aro $BCDE$ y siempre mantendrá el contacto con el aro.



ESTRATEGIA: Se cuenta con dos posiciones y hay una fuerza no conservativa presente, por lo que debe utilizar el principio de trabajo-energía. También, para que el objeto se mantenga en contacto con el aro, la fuerza N que el aro ejerce sobre el objeto debe ser igual o equivalente a cero. Por tanto, también debe utilizarse la segunda ley de Newton.

MODELAR: Seleccionar el objeto como sistema y modelarlo como una partícula. La figura 1 ilustra un diagrama de cuerpo libre y un diagrama cinético del objeto cuando está en el punto D . Dibuje el sistema en las posiciones 1 y 2 y defina su punto de referencia (figura 2).

ANALIZAR:

Segunda ley de Newton. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección normal y establecer que $N = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} +\downarrow \Sigma F_n &= ma_n: & W &= ma_n & mg &= ma_n & a_n &= g \\ a_n &= \frac{v_D^2}{r}: & v_D^2 &= ra_n = rg = (2 \text{ pies})(32.2 \text{ pies/s}^2) = 64.4 \text{ pies}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que v_D es la rapidez mínima del objeto en D a fin de que se mantenga en contacto con la trayectoria.

(continúa)

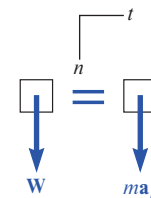
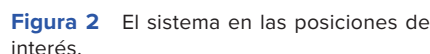


Figura 1 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético del objeto en el punto D .


$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (1)$$

Posición 1. *Energía potencial.* La energía elástica potencial es

$$V_{e_1} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(k)(0.25 \text{ pies})^2 = 0.03125k$$

Al seleccionar el nivel de referencia en A , se tiene $V_{g_1} = 0$.

Energía cinética. Dado que el objeto se libera desde el reposo, $v_A = 0$ y $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial. El resorte ahora no presenta deformaciones; por tanto $V_{e_2} = 0$. Dado que el objeto está 4 pies por encima del nivel de referencia, se obtiene

$$V_{g_2} = Wy_2 = (0.5 \text{ lb})(4 \text{ pies}) = 2 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

Energía cinética. Al utilizar el valor de v_D^2 obtenido, se tiene

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2} \frac{0.5 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} (64.4 \text{ pies}^2/\text{s}^2) = 0.5 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$

Trabajo. Dado que la fuerza normal equivale al peso sobre una superficie horizontal, el trabajo que realiza la fricción es

$$U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = -\mu_k Nd = -0.3(0.5 \text{ lb})(4 \text{ pies}) = -0.6 \text{ pies} \cdot \text{lb}$$

Trabajo-energía. Al sustituir los valores en la ecuación (1) se obtiene

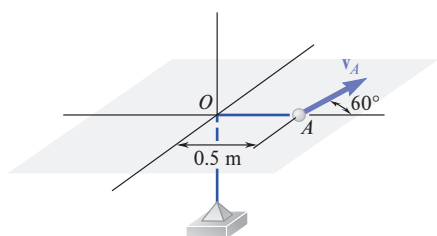
$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}$$

$$0 + 0 + 0.3125k - 0.6 \text{ pies} \cdot \text{lb} = 0.5 \text{ pies} \cdot \text{lb} + 2 \text{ pies} \cdot \text{lb} + 0$$

Se puede resolver esta ecuación para hallar k .

$k = 99.2 \text{ lb/pies}$

REVISAR y PENSAR: Un error común en problemas como este es suponer que la rapidez de la partícula es cero en la parte superior del aro en lugar de que la fuerza normal es igual o mayor que cero. Si el objeto tuviera una rapidez de cero en la parte superior del aro, claramente caería, lo que es imposible.



Problema modelo 13.11

Una esfera de masa $m = 0.6 \text{ kg}$ se une a un cordón elástico de constante $k = 100 \text{ N/m}$, el cual no está deformado cuando la esfera se localiza en el origen O . La esfera puede deslizarse sin fricción sobre la superficie horizontal y que en la posición indicada su velocidad $\mathbf{v}_A$ tiene una magnitud de

(continúa)

20 m/s, determine a) las distancias máxima y mínima de la esfera al origen O , b) los valores correspondientes de su rapidez.

ESTRATEGIA: La fuerza que ejerce la cuerda sobre la esfera pasa por el punto fijo O ; por tanto, se debe utilizar la conservación de la cantidad de movimiento angular. También debe hallarse la rapidez en ambos lugares y como no hay fuerzas no conservativas que actúan sobre la esfera, puede utilizarse la conservación de la energía.

MODELAR: Seleccionar la esfera que puede modelarse como una partícula, y la cuerda como el sistema.

ANALIZAR:

Conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de O . En el punto B , donde la distancia desde O es máxima (figura 1), la velocidad de la esfera es perpendicular a OB y la cantidad de movimiento angular es $r_m m v_m$. Una propiedad similar se cumple en el punto C , donde la distancia desde O es mínima. Al expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular entre A y B , se escribe

$$\begin{aligned} r_A m v_A \sin 60^\circ &= r_m m v_m \\ (0.5 \text{ m})(0.6 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) \sin 60^\circ &= r_m (0.6 \text{ kg}) v_m \\ v_m &= \frac{8.66}{r_m} \end{aligned} \quad (1)$$

Se tienen dos incógnitas v_m y r_m . Por tanto, debe utilizar la conservación de la energía para obtener la segunda ecuación.

Conservación de la energía

En el punto A: $T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} (0.6 \text{ kg}) (20 \text{ m/s})^2 = 120 \text{ J}$
 $V_A = \frac{1}{2} k r_A^2 = \frac{1}{2} (100 \text{ N/m}) (0.5 \text{ m})^2 = 12.5 \text{ J}$

En el punto B: $T_B = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} (0.6 \text{ kg}) v_m^2 = 0.3 v_m^2$
 $V_B = \frac{1}{2} k r_m^2 = \frac{1}{2} (100 \text{ N/m}) r_m^2 = 50 r_m^2$

Al aplicar el principio de conservación de la energía entre los puntos A y B , se escribe

$$\begin{aligned} T_A + V_A &= T_B + V_B \\ 120 + 12.5 &= 0.3 v_m^2 + 50 r_m^2 \end{aligned} \quad (2)$$

a) Valores máximo y mínimo de la distancia. Al sustituir v_m de la ecuación (1) en la ecuación (2) y resolver para r_m^2 , se obtiene

$$r_m^2 = 2.468 \text{ o } 0.1824 \quad r_m = 1.571 \text{ m}, r'_m = 0.427 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

b) Valores de rapidez correspondientes. Al sustituir los valores que se obtuvieron para r_m y r'_m en la ecuación (1), se tiene

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{8.66}{1.571} & v_m &= 5.51 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft \\ v'_m &= \frac{8.66}{0.427} & v'_m &= 20.3 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

REVISAR y PENSAR: Este problema es similar a los problemas de mecánica celeste; en lugar de la fuerza gravitacional central que actúa sobre un cuerpo en órbita, se tiene la fuerza resorte que actúa sobre la esfera. Puede demostrarse que la trayectoria de la esfera es una elipse con el centro en O .

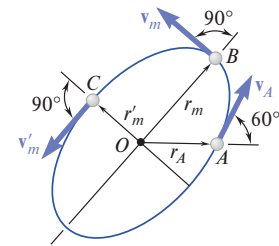


Figura 1 Partícula en las posiciones A, B y C.

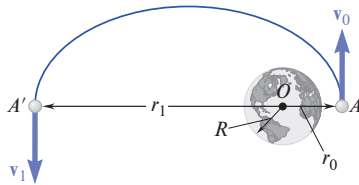
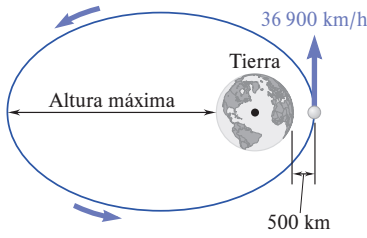


Figura 1 El sistema en las dos posiciones de interés.

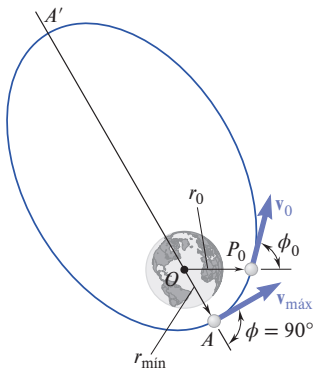


Figura 2 Se utilizan dos posiciones para determinar el máximo error permisible en la dirección.

Problema modelo 13.12

Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determine *a*) la altura máxima alcanzada por el satélite, *b*) el error máximo permisible en la dirección de lanzamiento si el satélite va a entrar a una órbita en la que su máximo acercamiento a la superficie terrestre va a ser de 200 km.

ESTRATEGIA: Dado que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de gravedad, que es una fuerza central, y se tiene interés en dos posiciones (la posición del satélite al momento del lanzamiento y en su altitud máxima), puede utilizarse la conservación de la cantidad de movimiento angular y la conservación de la energía.

MODELAR: Seleccionar el satélite como su sistema y modelarlo como una partícula.

ANALIZAR:

a) Altura máxima. Se denota por A' el punto de la órbita más alejado de la Tierra y por r_1 la distancia correspondiente desde el centro del planeta (figura 1). Puesto que el satélite se encuentra en vuelo libre entre A y A' , se aplica el principio de conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_{A'} + V_{A'} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \quad (1)$$

Ahora, se aplica el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular del satélite alrededor de O . Al considerar los puntos A y A' , se escribe

$$r_0mv_0 = r_1mv_1 \quad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \quad (2)$$

Al sustituir esta expresión para v_1 en la ecuación (1), y dividir cada término entre la masa m y reagrupar los términos, se obtiene

$$\frac{1}{2}v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_1} \right)$$

Factorizando y simplificando se obtiene

$$1 + \frac{r_0}{r_1} = \frac{2GM}{r_0v_0^2} \quad (3)$$

Al recordar que el radio de la Tierra es $R = 6\,370$ km, se calcula

$$r_0 = 6\,370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6\,870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m} \\ v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = (36.9 \times 10^6 \text{ m}) / (3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s} \\ GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (3), se obtiene $r_1 = 66.8 \times 10^6$ m.

Altura máxima = $66.8 \times 10^6 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 60.4 \times 10^6 \text{ m} =$

60 400 km ◀

b) Error permisible en la dirección de lanzamiento. Para el inciso *b*), denote el punto de lanzamiento como el punto P_0 y la ubicación cuando la distancia sobre la Tierra es de 200 km como el punto A . El satélite se lanza desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 (figura 2). El valor de ϕ_0

(continúa)

corresponde a $r_{\min} = 6\,370\text{ km} + 200\text{ km} = 6\,570\text{ km}$ se obtiene aplicando el principio de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular entre P_0 y A :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} \quad (4)$$

$$r_0mv_0\sin\phi_0 = r_{\min}mv_{\max} \quad (5)$$

Al resolver (5) para $v_{\max}$ y luego sustituir $v_{\max}$ en (4), se puede resolver (4) respecto a $\sin\phi_0$. Utilizando los valores de v_0 y GM calculados en el inciso a) y al advertir que $r_0/r_{\min} = 6\,870/6\,570 = 1.0457$, se encuentra

$$\sin\phi_0 = 0.9801 \quad \phi_0 = 90^\circ \pm 11.5^\circ \quad \text{Error permisible} = \pm 11.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Las sondas espaciales y otros vehículos de larga distancia están diseñados con pequeños cohetes para poder hacer correcciones en medio del curso. Los satélites lanzados desde la estación espacial en general no requieren ese tipo de correcciones.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se examinó el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula A mientras se mueve de una posición dada A_1 a otra posición dada A_2 (figura 13.11a). Si el trabajo es independiente de la trayectoria seguida por la partícula, entonces es posible definir una función V , llamada **energía potencial**, para la fuerza $\mathbf{F}$.

$$U_{1 \rightarrow 2} = -[(V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1))] = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \quad (13.19)$$

o, en forma breve,

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

Hay que observar que el trabajo es negativo cuando el cambio en la energía potencial es positivo, esto es, cuando $V_2 > V_1$.

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación para el trabajo y la energía, se puede escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

o

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (13.24')$$

que muestra que cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa **la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece cons-**

tante. Esa ecuación se ha expandido para casos en los que hay presentes fuerzas no conservativas.

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (13.24'')$$

La solución de problemas en los que se use la fórmula anterior consistirá de los siguientes pasos.

1. Determine si todas las fuerzas implicadas son conservativas. Si algunas de las fuerzas no son conservativas, por ejemplo, si está implicada la fricción, se debe usar el método del trabajo y la energía (13.24''), ya que el trabajo efectuado por tales fuerzas depende de la trayectoria seguida por la partícula y no existe una función potencial para dichas fuerzas no conservativas. Si no hay fricción y si todas las fuerzas son conservativas, se puede proceder de la siguiente manera.

$$U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = \int_1^2 \mathbf{F}^{\text{NC}} \cdot d\mathbf{s}$$

2. Determinar la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ en cada extremo de la trayectoria.

3. Calcular la energía potencial de todas las fuerzas implicadas en cada extremo de la trayectoria. Suele ser útil dibujar el sistema en las posiciones 1 y 2 y definir un punto de referencia. De esta forma, es posible determinar más fácilmente la deflexión de un resorte y el valor de y en cada posición. Recuérdese que las siguientes expresiones para la energía potencial se obtuvieron en esta sección.

a) La energía potencial del peso W cerca de la superficie de la Tierra y a una altura y sobre un nivel de referencia dado,

$$V_g = Wy \quad (13.16)$$

b) La energía potencial de una masa m localizada a una distancia r del centro de la Tierra, suficientemente grande de manera que la variación de la fuerza de la gravedad deba tomarse en cuenta,

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$$

donde la distancia r se mide desde el centro de la Tierra y V_g es igual a cero en $r = \infty$.

c) La energía potencial de un cuerpo con respecto a una fuerza elástica $F = kx$,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$$

donde la distancia x es la deformación del resorte elástico medida desde su posición *no deformada* y k es la constante de resorte. Advierta que V_e depende exclusivamente de la deformación x y no de la trayectoria del cuerpo unido al resorte. Además, V_e siempre es positiva, ya sea que el resorte esté comprimido o extendido.

4. Sustituir las expresiones para el trabajo no conservativo y las energías cinética y potencial en la ecuación (13.24'') anterior. Se puede resolver esta ecuación para una incógnita, por ejemplo, para una velocidad (problema modelo 13.8). Si está implicada más de una incógnita, se tendrá que buscar otra condición o ecuación, tal como la segunda ley de Newton (problema modelo 13.10), la rapidez máxima (problema

modelo 13.9), la rapidez mínima (problema modelo 13.10) o la energía potencial mínima de la partícula. En el caso de problemas que impliquen una fuerza central, puede obtenerse una segunda ecuación utilizando la conservación de la cantidad de movimiento angular (problema modelo 13.11). Esto es en especial útil en las aplicaciones a la mecánica celeste (sección 13.2D).

Problemas

PREGUNTAS CONCEPTUALES

- 13.PC2** Dos bolas pequeñas A y B con masas respectivas de $2m$ y m se sueltan desde el reposo a una altura h desde el suelo. Si desprecia la resistencia del aire, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero cuando las dos bolas golpean el suelo?
- La energía cinética de A es la misma que la energía cinética de B .
 - La energía cinética de A es la mitad de la energía cinética de B .
 - La energía cinética de A es el doble de la energía cinética de B .
 - La energía cinética de A es cuatro veces la energía cinética de B .
- 13.PC3** Un pequeño bloque A se suelta desde el reposo y desliza hacia abajo en la rampa sin fricción hasta el lazo. La altura máxima h de lazo es la misma que la altura inicial del bloque. ¿ A realizará una vuelta completa alrededor del lazo sin perder contacto con la vía?
- Sí.
 - No.
 - Se necesita más información.

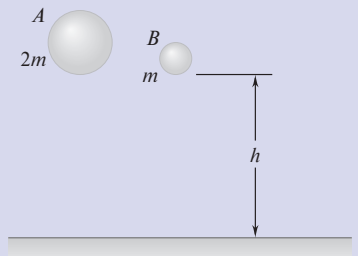


Figura P13.PC2

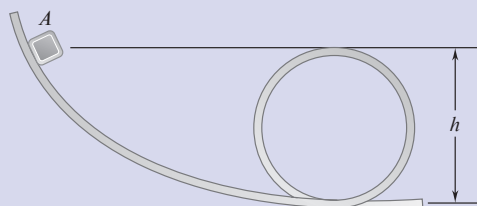


Figura P13.PC3

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

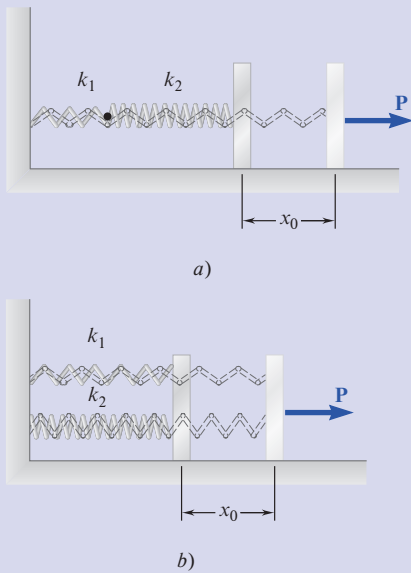


Figura P13.55

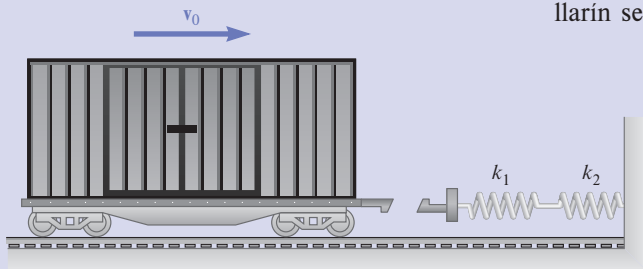


Figura P13.56

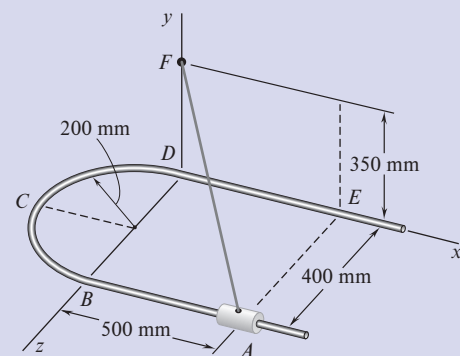


Figura P13.57

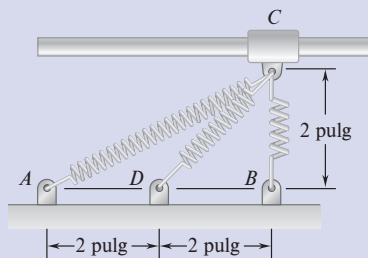


Figura P13.58

13.55 Una fuerza P se aplica lentamente a una placa que está unida a dos resortes y provoca una deflexión x_0 . En cada uno de los dos casos indicados, obtenga una expresión para la constante k_e , en términos de k_1 y k_2 , del resorte único equivalente al sistema dado, esto es, de un resorte que experimentaría la misma deformación x_0 si se sometiera a la misma fuerza P .

13.56 Un vagón de ferrocarril de masa m cargado, avanza a una velocidad constante v_0 cuando se acopla con un sistema de amortiguador sin masa. Determine la deflexión máxima del amortiguador si los dos resortes están a) en serie (como se indica), b) en paralelo.

13.57 Un collarín de 750 g puede deslizarse sobre la varilla horizontal que se ilustra. Está conectado a una cuerda elástica de una longitud sin deformar de 300 mm y un resorte con una constante de 150 N/m. Si se sabe que el collarín se libera desde el reposo en el punto A y sin tener en cuenta la fricción, determine la rapidez del collarín a) en el punto B, b) en el punto E.

13.58 Un collarín C de 2 lb puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal. Está unido a tres resortes, cada uno de 30 lb/pie constantes y 2 pulg de longitud no deformada. Si se sabe que el collarín se libera desde el reposo en la posición mostrada, determine la rapidez máxima que alcanzará en el subsiguiente movimiento.

13.59 Resuelva el problema 13.58 suponiendo que el resorte CD ha sido retirado.

13.60 Un collarín de 500 g se puede deslizar sin fricción sobre la varilla curva BC en un plano horizontal. Si la longitud no deformada del resorte es de 80 mm y $k = 400$ kN/m, determine a) la velocidad que se le debe imprimir al collarín en el punto A para llegar a B con velocidad nula, b) la velocidad del collarín cuando llegue al punto C.

13.61 Para el dispositivo adaptado del juego de tejos del problema 13.28, se decidió utilizar una cuerda elástica en lugar de un resorte de

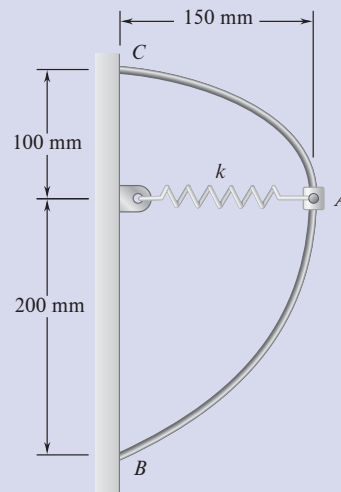


Figura P13.60

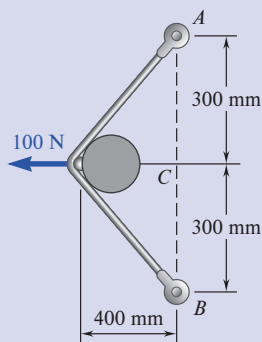


Figura P13.61

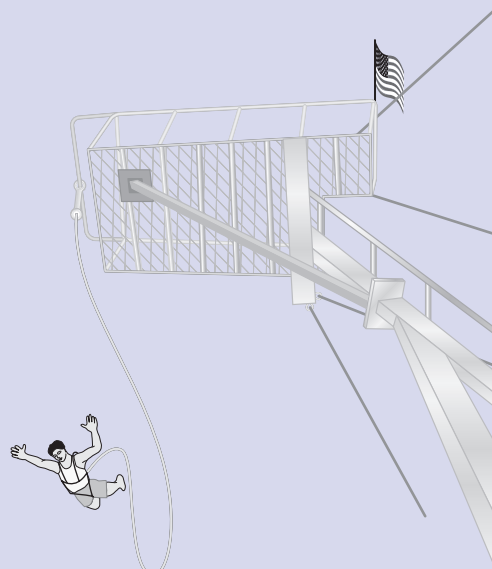


Figura P13.62

compresión para impulsar el tejo hacia adelante. Cuando la cuerda se estira directamente entre los puntos A y B , la tensión es de 20 N. El tejo de 425 g se coloca en el centro y se lleva hacia atrás una distancia de 40 cm; se requiere una fuerza de 100 N para mantenerlo en este lugar. Si se sabe que el coeficiente de fricción es de 0.3, determine la distancia que recorrerá el tejo.

- 13.62** Se va a diseñar un cable elástico para una plataforma de salto desde una torre de 130 pies de altura. Las especificaciones piden que el cable tenga 85 pies de largo sin estirar y que se estire hasta una longitud total de 100 pies cuando se le una un peso de 600 lb y se deje caer desde la torre. Determine *a*) la constante de resorte k requerida del cable, *b*) ¿cuánto se acercará al suelo una persona de 186 lb si usa este cable para saltar desde la torre?

- 13.63** Se demuestra en mecánica de materiales que la rigidez de un cable elástico es $k = AE/L$, donde A es el área de la sección transversal del cable, E es el módulo de elasticidad y L es la longitud del cable. Un malacate está bajando una pieza de maquinaria de 4 000 lb utilizando una rapidez constante de 3 pies/s cuando se para repentinamente. Si se sabe que el cable de acero tiene un diámetro de 0.4 pulg, $E = 29 \times 10^6$ lb/pulg² y que el malacate se detiene en $L = 30$ pies, determine el desplazamiento hacia abajo máximo de la pieza de maquinaria desde el punto en que estaba cuando se detuvo el malacate.

- 13.64** Un collarín de 1.2 kg puede deslizarse a lo largo de la varilla que se muestra en la figura. Está conectado a un cordón elástico anclado en F . El cordón tiene una longitud no deformada de 300 mm y una constante de resorte de 70 N/m. Si se sabe que el collarín se libera desde el reposo en A y se desprecia la fricción, determine la rapidez del collarín *a*) en B , *b*) en E .

- 13.65** Un collarín de 500 g puede deslizarse sin fricción sobre la varilla semicircular BCD . El resorte tiene una constante de 320 N/m y su longitud sin deformación es de 200 mm. Si se sabe que el collarín

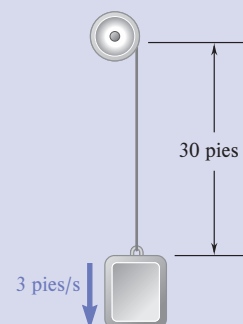


Figura P13.63

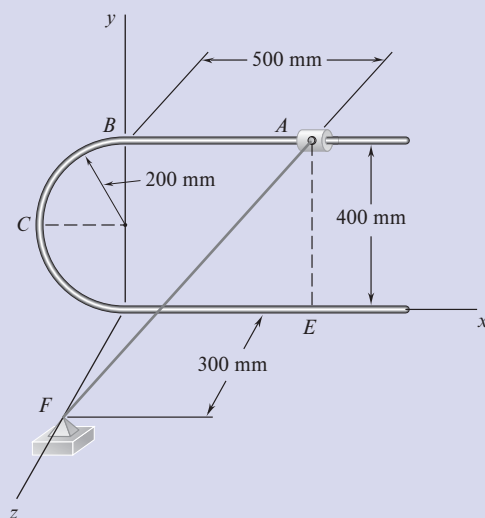


Figura P13.64

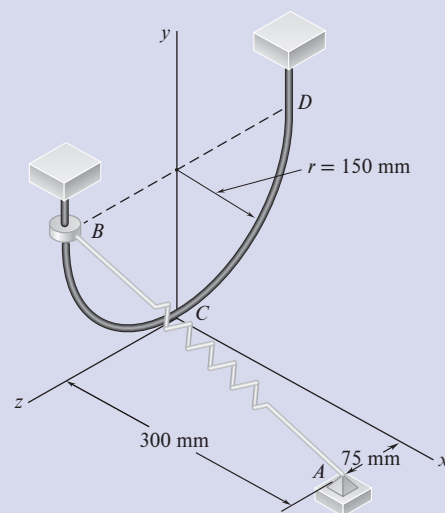


Figura P13.65

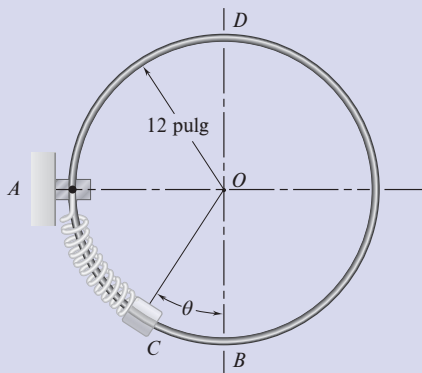


Figura P13.66

se libera del reposo en el punto B , determine a) la rapidez del collarín cuando pasa por el punto C , b) la fuerza ejercida por la varilla sobre el collarín en el punto C .

- 13.66** Una varilla circular delgada se mantiene en un plano vertical por medio de una brida en A . Unido a la brida y enrollado holgadamente alrededor de la varilla está un resorte de constante $k = 3 \text{ lb/pie}$ y longitud no deformada igual al arco de círculo AB . Un collarín C de 8 oz, que no está unido al resorte, puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo a un ángulo θ con respecto a la vertical, determine a) el valor mínimo de θ para el cual el collarín pasará a través de D y llegará al punto A , b) la velocidad del collarín cuando este llega al punto A .

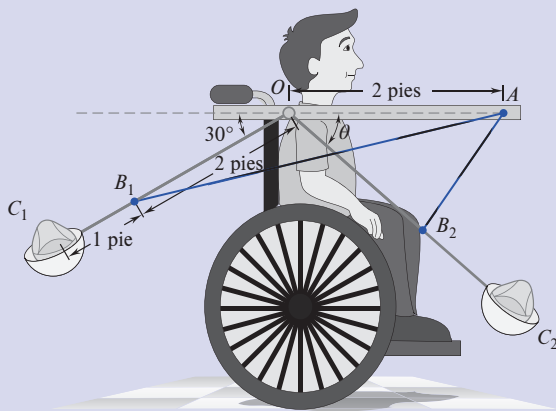


Figura P13.67

- 13.67** Cornhole es un juego que requiere lanzar bolsas con frijoles a través de un agujero en una tabla de madera. Las personas con movilidad limitada de los miembros superiores tienen dificultad para disfrutar de esta actividad. Un dispositivo de lanzamiento adaptado se ensambla a una silla de ruedas de modo que los puntos O y A están fijos. El dispositivo imita un lanzamiento por debajo de la cintura al utilizar una banda elástica para accionar el brazo OC , que rota sobre el perno O . La cuerda elástica tiene una longitud sin estirar de 1 pie y está conectada al punto fijo A y al punto B del brazo. El peso combinado de la bolsa con frijoles y el soporte del punto C es de 4 lb y se puede ignorar el peso de la varilla OB . Una pequeña abrazadera sostiene la bolsa con frijoles en la taza hasta que se libera. Si se sabe que el punto de inicio está a 30° de la horizontal como se ilustra en la figura, determine la constante del resorte si la velocidad de la bolsa con frijoles es de 31 pies/s cuando la bolsa se libera a un ángulo de $\theta = 45^\circ$.

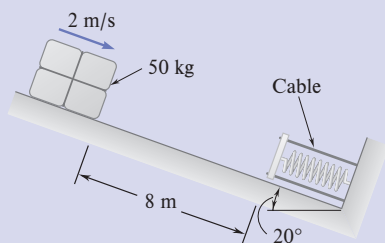


Figura P13.68

- 13.68** Un resorte se usa para detener un paquete de 50 kg, el cual se mueve hacia abajo sobre una pendiente de 20° . El resorte tiene una constante $k = 30 \text{ kN/m}$ y se sostiene mediante cables, de manera que en un inicio está comprimido 50 mm. Si se sabe que la velocidad del paquete es de 2 m/s cuando se encuentra a 8 m del resorte y si se desprecia la fricción, determine la deformación adicional máxima del resorte para llevar el paquete al reposo.

- 13.69** Retome el problema 13.68, y ahora suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.15.

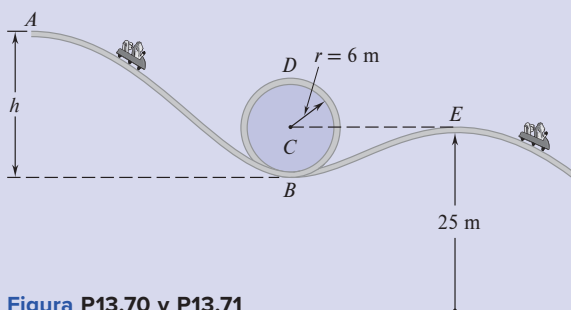


Figura P13.70 y P13.71

- 13.70** Un vagón de montaña rusa inicia su movimiento desde el reposo en A , rueda por la pista hasta B , describe un bucle circular de 12 m de diámetro y se desplaza hacia arriba y hacia abajo, más allá del punto E . Si se sabe que $h = 20 \text{ m}$ y se supone que no hay pérdida de energía debido a la fricción, determine la fuerza ejercida por el asiento sobre un pasajero de 50 kg en B , D y E .

- 13.71** Un vagón de montaña rusa inicia su movimiento desde el reposo en A , rueda por la pista hasta B , describe un bucle circular de 12 m de diámetro y se desplaza hacia arriba

y hacia abajo, más allá del punto E . Determine el rango de valores de h para los cuales el vagón no se saldrá de la pista en D o E . Suponga que no hay pérdida de energía debido a la fricción.

- 13.72** Un collarín de 1 lb está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un plano vertical. El resorte tiene una longitud no deformada de 5 pulg y una constante $k = 10$ lb/pie. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A , determine la rapidez del collarín y la fuerza normal entre el collarín y la varilla cuando el collarín pasa por B .

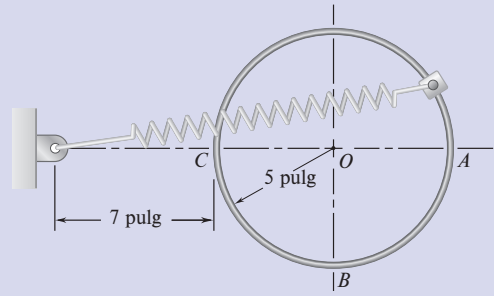


Figura P13.72

- 13.73** Un collarín de 10 lb se une a un resorte y desliza sin fricción a lo largo de una varilla fija en un plano vertical. El resorte tiene una longitud no deformada de 14 pulg y una constante $k = 4$ lb/pulg. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en la posición que se indica, determine la fuerza ejercida por la varilla sobre el collarín en $a)$ el punto A , $b)$ el punto B . Ambos puntos están sobre la curva de la varilla.

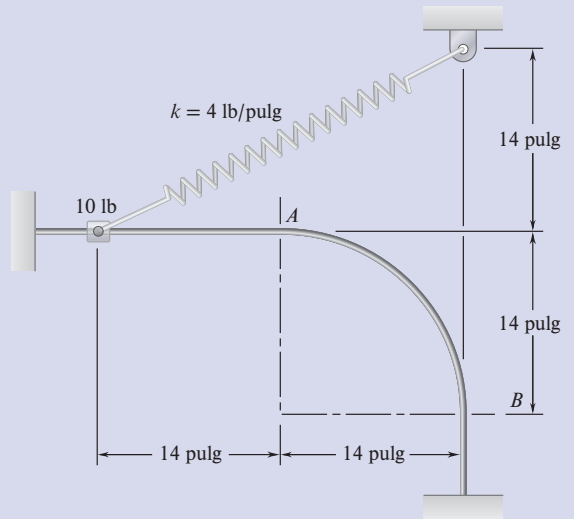


Figura P13.73

- 13.74** Un paquete de 8 onzas se lanza, mediante un resorte en A , hacia arriba con una velocidad v_0 ; el paquete se mueve alrededor de un conducto sin fricción y se deposita en C . Para cada uno de los dos conductos que se muestran, determine $a)$ la velocidad mínima v_0 para la cual el paquete llegará a C , $b)$ la fuerza correspondiente ejercida por el paquete en el conducto justo antes de abandonarlo en C .

- 13.75** Si el paquete del problema 13.74 no debe golpear la superficie horizontal en C con una rapidez mayor que 10 pies/s, $a)$ demuestre que este requisito solo puede ser satisfecho por el segundo conducto, $b)$ determine la velocidad inicial máxima permisible v_0 cuando se emplea el segundo conducto.

- 13.76** Un pequeño paquete de peso W se proyecta en un lazo de retorno vertical en A con una velocidad v_0 . El paquete viaja sin fricción a lo largo de un círculo de radio r y se deposita sobre una superficie horizontal en C . Para cada uno de los dos lazos que se muestran, determine $a)$ la velocidad más baja v_0 para la cual el paquete alcanzará

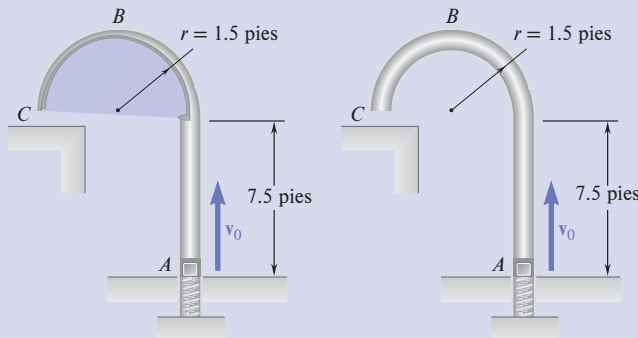


Figura P13.74 y P13.75

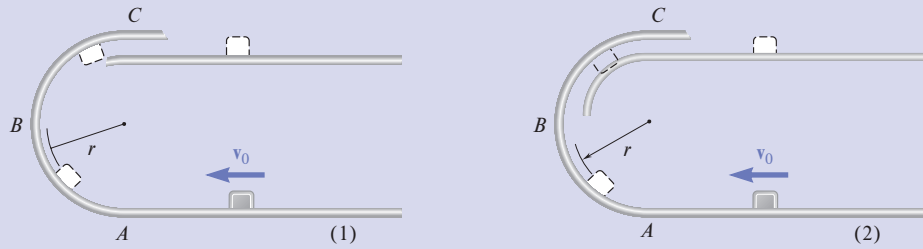


Figura P13.76

la superficie horizontal en C, b) la fuerza correspondiente ejercida por el lazo sobre el paquete cuando este pasa por el punto B.

13.77 La pelota de 1 kg en A se encuentra suspendida de una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de 5 m/s. Si $l = 0.6$ m y $x_B = 0$, determine y_B de forma que la pelota entre en la canasta.

13.78 Al péndulo mostrado en la figura se le imprime una rapidez inicial v_0 en A y gira 90° antes de que la cuerda toque el apoyo fijo B. Si se sabe que $a = 0.4 l$, determine la menor v_0 para la cual el péndulo describirá un círculo alrededor del apoyo.

***13.79** Demuestre que una fuerza $F(x, y, z)$ es conservativa, si y solo si se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

13.80 La fuerza $\mathbf{F} = (yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k})/xyz$ actúa sobre la partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. a) Utilizando la relación deducida en el problema 13.79, demuestre que es una fuerza conservativa. b) Determine la función potencial asociada con $\mathbf{F}$.

***13.81** Una fuerza $\mathbf{F}$ actúa sobre una partícula $P(x, y)$ que se mueve en el plano xy . Determine si $\mathbf{F}$ es una fuerza conservativa y calcule el trabajo de $\mathbf{F}$ cuando P describe la trayectoria ABCA en sentido horario, incluido el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = a^2$, si a) $\mathbf{F} = ky\mathbf{i}$, b) $\mathbf{F} = k(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

***13.82** Se sabe que la función potencial asociada con una fuerza $\mathbf{P}$ en el espacio es $V(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. a) Determine las componentes x , y y z de $\mathbf{P}$. b) Calcule el trabajo realizado por $\mathbf{P}$ desde O hasta D, integrando a lo largo de la trayectoria OABD y demuestre que es igual al negativo del cambio en el potencial desde O hasta D.

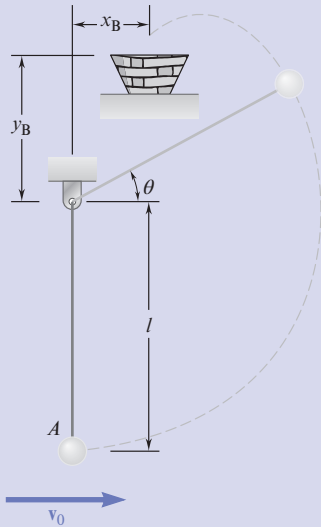


Figura P13.77

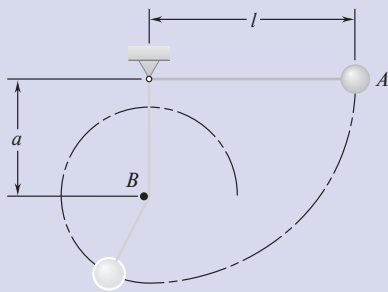


Figura P13.78

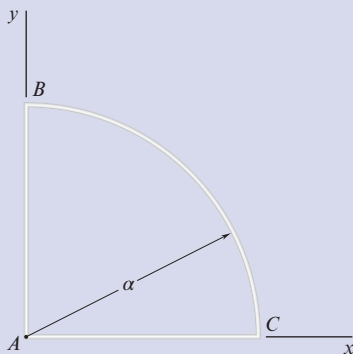


Figura P13.81

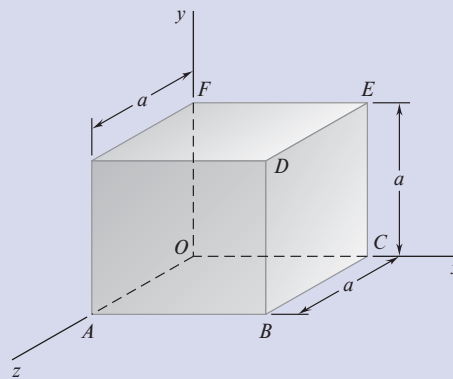


Figura P13.82

13.83 Ciertos resortes se caracterizan por incrementar la rigidez al aumentar la deformación según la relación $F = k_1x + k_2x^3$, donde F es la fuerza ejercida por el resorte, k_1 y k_2 son constantes positivas, y x es la deflexión del resorte medida desde su posición no deformada. Determine *a*) la energía potencial V_e en función de x , *b*) la velocidad máxima de una partícula de masa m unida al resorte y liberado del reposo con $x = x_0$. Desprecie la fricción.

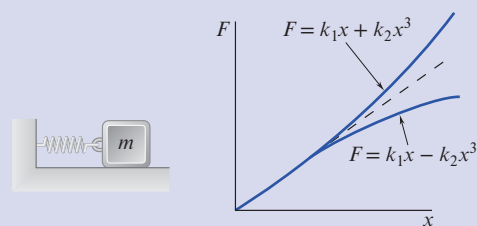


Figura P13.83 y P13.84

13.84 Ciertos resortes se caracterizan por disminuir la rigidez al aumentar la deformación según la relación $F = k_1x - k_2x^3$, donde F es la fuerza ejercida por el resorte, k_1 y k_2 son constantes positivas, y x es la deflexión del resorte medida desde su posición no deformada. Determine *a*) la energía potencial V_e en función de x , *b*) la velocidad máxima de una partícula de masa m unida al resorte y liberado del reposo con $x = x_0$. Desprecie la fricción.

13.85 *a*) Determine la energía cinética por unidad de masa que debe tener un misil después de ser disparado desde la superficie terrestre si va a alcanzar una distancia infinita. *b*) ¿Cuál es la velocidad inicial del misil (llamada la *velocidad de escape*)? Proporcione sus respuestas en unidades del SI y demuestre que la respuesta del inciso *b*) es independiente del ángulo de disparo.

13.86 Un satélite describe una órbita elíptica de altitud mínima de 606 km sobre la superficie de la Tierra. Los semiejes mayor y menor son de 17 440 km y 13 950 km, respectivamente. Si la rapidez del satélite en el punto *C* es de 4.78 km/s, determine *a*) la rapidez en el punto *A*, el perigeo, *b*) la rapidez en el punto *B*, el apogeo.

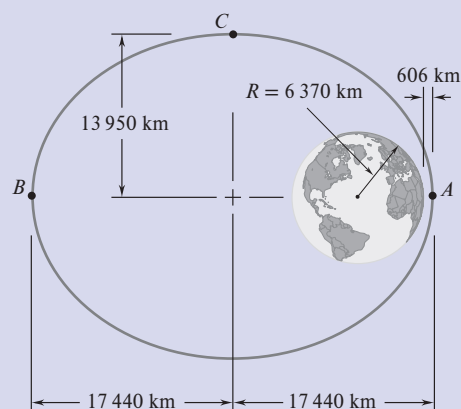


Figura P13.86

13.87 Mientras describe una órbita circular a 200 mi sobre la Tierra un vehículo espacial lanza un satélite de comunicaciones de 6 000 lb. Determine *a*) la energía adicional que se requiere para poner el satélite en una órbita geosíncrona a una altura de 22 000 mi sobre la superficie terrestre, *b*) la energía requerida para poner el satélite en la misma órbita lanzándolo desde la superficie de la Tierra, sin incluir la energía necesaria para superar la resistencia del aire (una *órbita geosíncrona* es una órbita circular en la cual el satélite parece estacionario con respecto al suelo).

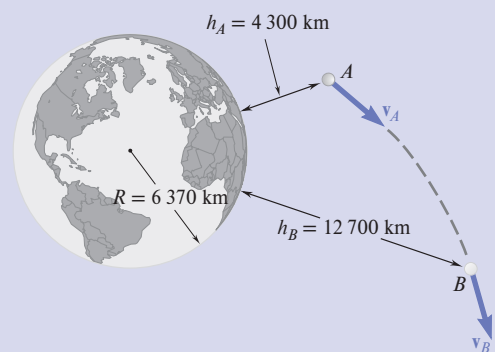


Figura P13.89

13.88 ¿Cuánta energía por libra deberá impartirse a un satélite a fin de colocarlo en una órbita circular a una altitud de *a*) 400 mi, *b*) 4 000 mi?

13.89 Si se sabe que la velocidad de una sonda espacial experimental lanzada desde la Tierra tiene una magnitud $v_A = 32.5$ Mm/h en el punto *A*, determine la rapidez de la sonda cuando pase por el punto *B*.

13.90 Una nave espacial está describiendo una órbita circular a una altura de 1 500 km sobre la superficie de la Tierra. Cuando pasa por el punto *A*, su rapidez se reduce en 40% y entra a una trayectoria elíptica de impacto con un apogeo en el punto *A*. Desprecie la resistencia del aire y determine la rapidez de la nave espacial cuando alcanza la superficie terrestre en el punto *B*.

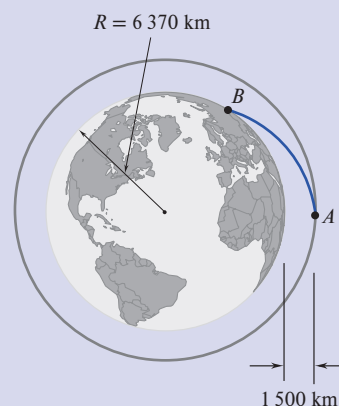


Figura P13.90

13.91 Las observaciones muestran que un cuerpo celeste que viaja a 1.2×10^6 mi/h parece describir un círculo de radio igual a 60 años luz

alrededor del punto B . Se sospecha que el punto B es una concentración de masa muy densa conocida como hoyo negro. Determine el cociente M_B/M_S de la masa en B y la masa del Sol (la masa del Sol es 330 000 veces la masa de la Tierra y un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año a la velocidad de 186 300 mi/s).

- 13.92** a) Demuestre que, si se establece $r = R + y$ en el miembro del lado derecho de la ecuación (13.17') y se desarrolla ese miembro en una serie de potencias en y/R , la expresión en la ecuación (13.16) para la energía potencial V_g debida a la gravedad es una aproximación de primer orden para la expresión dada en la ecuación (13.17'). b) Utilizando el mismo desarrollo, deduzca una aproximación de segundo orden para V_g .

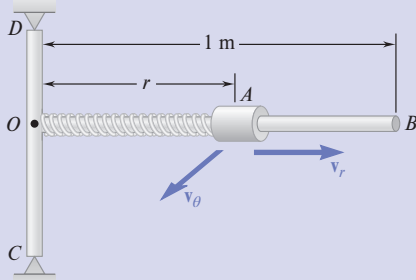


Figura P13.93 y P13.94

- 13.93** El collarín A tiene una masa de 3 kg y está unido a un resorte de constante 1 200 N/m y de longitud no deformada igual a 0.5 m. El sistema se pone en movimiento con $r = 0.3$ m, $v_\theta = 2$ m/s y $v_r = 0$. Ignorando la masa de la varilla y el efecto de la fricción, determine las componentes radial y transversal de la velocidad del collarín cuando $r = 0.6$ m.

- 13.94** El collarín A tiene una masa de 3 kg y se une a un resorte de constante igual a 1 200 N/m y de longitud no deformada de 0.5 m. El sistema se pone en movimiento con $r = 0.3$ m, $v_\theta = 2$ m/s y $v_r = 0$, ignorando la masa de la varilla y el efecto de la fricción, determine a) la distancia máxima entre el origen y el collarín, b) la rapidez correspondiente. (Sugerencia: Resuelva la ecuación obtenida para r mediante ensayo y error).

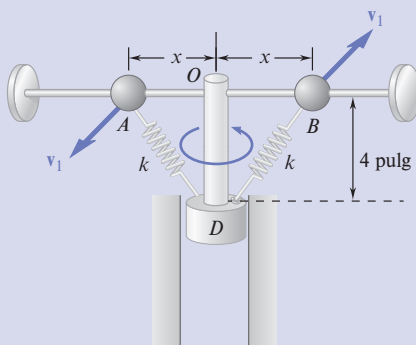


Figura P13.95

- 13.95** Un regulador está diseñado de modo que la válvula de masa insignificante del punto D se abre cuando se ejerce sobre ella una fuerza vertical de más de 20 lb. En las pruebas iniciales del dispositivo, las dos masas de 1 lb están en $x = 1$ pulg y se evita que se deslicen por la varilla mediante topes. Las masas están conectadas a la válvula mediante dos resortes de 10 lb/pulg que están sin deformaciones en $x = 1$ pulg. El regulador gira de modo que $v_1 = 30$ pies/s cuando los topes se retiran. Cuando la válvula se abre, determine la posición y la velocidad de las masas.

- 13.96** Una bola de 1.5 lb que puede deslizarse sobre una superficie sin fricción horizontal se une a un punto fijo O por medio de una cuerda elástica de constante $k = 1$ lb/pulg y longitud no deformada de 2 pies. La bola se ubica en el punto A , a 3 pies de O , y se le da una velocidad inicial v_0 perpendicular a OA . Determine a) el valor permisible más pequeño de la rapidez inicial v_0 si la cuerda no se afloja, b) la distancia más cercana a la que la bola d se acerca al punto O si se le da la mitad de la velocidad inicial encontrada en el inciso a).

- 13.97** Una bola de 1.5 lb que puede deslizarse sobre una superficie sin fricción horizontal se une a un punto fijo O por medio de una cuerda elástica de constante $k = 1$ lb/pulg y longitud no deformada de 2 pies. La bola se ubica en el punto A , a 3 pies de O , y se le da una velocidad inicial v_0 perpendicular a OA , permitiendo que la bola quede dentro de la distancia $d = 9$ pulg del punto O después de que la cuerda se ha aflojado. Determine a) la rapidez inicial v_0 de la bola, b) su rapidez máxima.

- 13.98** Utilizando los principios de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular, resuelva la parte a) del problema modelo 12.14.

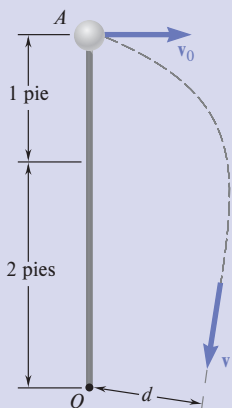


Figura P13.96 y P13.97

- 13.99** Solucione el problema modelo 13.11, suponiendo que la cuerda elástica fue reemplazada por una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud $(80/r^2)$ N dirigida hacia O .
- 13.100** Una nave espacial describe una órbita elíptica de altura mínima $h_A = 2\,400$ km y altura máxima $h_B = 9\,600$ km sobre la superficie de la Tierra. Determine la rapidez de la nave espacial en A .

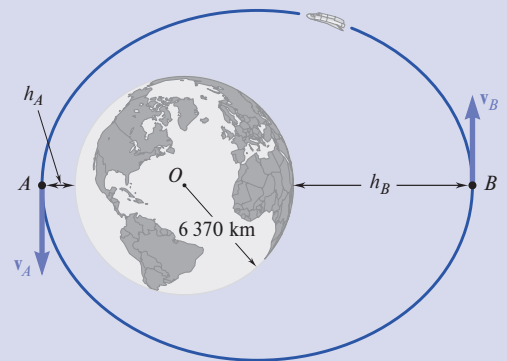


Figura P13.100

- 13.101** Mientras describe una órbita circular, 185 mi arriba de la superficie terrestre, un taxi espacial expulsa en el punto A una etapa superior inercial (ESI) que transporta un satélite de comunicaciones que se va a ubicar en una órbita geosíncrona (véase el problema 13.87) a una altura de 22 230 mi sobre la superficie de la Tierra. Determine *a*) la velocidad de la ESI relativa al taxi después de que su motor se ha encendido en A , *b*) el aumento de la velocidad requerido en B para poner al satélite en su órbita final.
- 13.102** Una nave espacial que se aproxima al planeta Saturno alcanza el punto A con una velocidad v_A de 68.8×10^3 pies/s de magnitud. Se pone en órbita elíptica alrededor de Saturno de manera que será capaz de examinar periódicamente a Tetis, una de las lunas de Saturno. Tetis se ubica en una órbita circular de 183×10^3 mi de radio alrededor del centro de Saturno y viaja a una rapidez de 37.2×10^3 pies/s. Determine *a*) la reducción en la rapidez requerida por la nave espacial en A para que alcance la órbita deseada, *b*) la rapidez de la nave espacial cuando alcance la órbita de Tetis en B .
- 13.103** Se espera que una nave espacial, que viaja a lo largo de una trayectoria parabólica hacia el planeta Júpiter, alcance el punto A con una velocidad v_A de 26.9 km/s de magnitud. Sus motores se activarán entonces para frenarla, colocándola en una órbita elíptica que la pondrá a 100×10^3 km de Júpiter. Determine la reducción en la rapidez Δv en el punto A que colocará a la nave espacial en la órbita requerida. La masa de Júpiter es 319 veces la masa de la Tierra.
- 13.104** Como una primera aproximación al análisis de un vuelo espacial de la Tierra a Marte, se supone que las órbitas de la Tierra

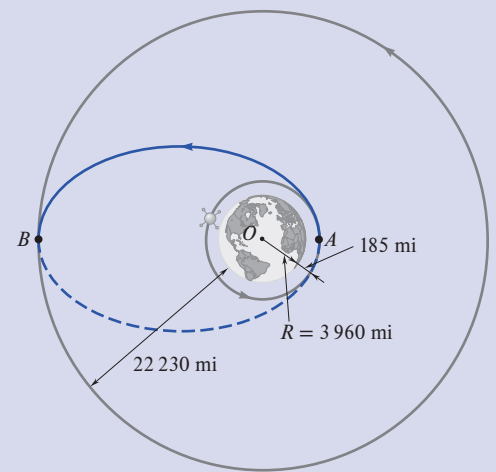


Figura P13.101

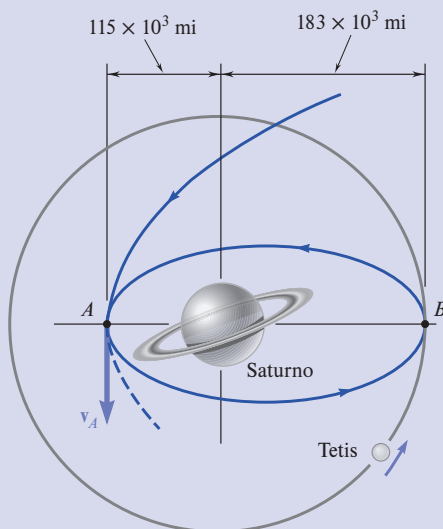


Figura P13.102

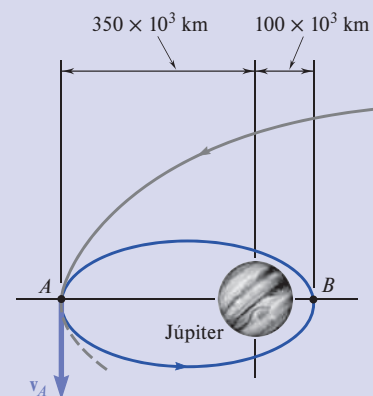


Figura P13.103

©Martin Adams/iStockphoto/Getty Images

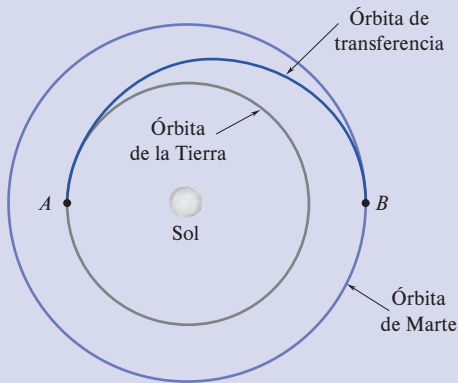


Figura P13.104

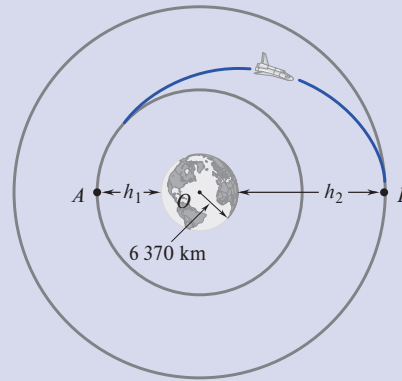


Figura P13.105

y Marte son circulares y coplanares. Las distancias medias desde el Sol a la Tierra y a Marte son, respectivamente, 149.6×10^6 km y 227.8×10^6 km. Para poner la nave espacial en una órbita de transferencia elíptica en el punto A, su rapidez se incrementa durante un corto intervalo hasta v_A que es mayor que la rapidez orbital terrestre. Cuando la nave espacial alcanza el punto B sobre la órbita de transferencia elíptica, su rapidez v_B se incrementa hasta la rapidez orbital de Marte. Sabiendo que la masa del Sol es 332.8×10^3 veces la masa de la Tierra, determine el aumento de velocidad requerido a) en A, b) en B.

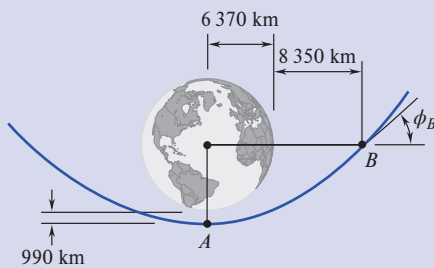


Figura P13.106

13.105 La manera óptima de transferir un vehículo espacial de una órbita circular a una órbita coplanar exterior es activar sus motores cuando pasa a través de A para aumentar su rapidez y ponerla en una órbita de transferencia elíptica. Otro incremento en la rapidez cuando pasa por B la colocará en la órbita circular deseada. Para un vehículo en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura $h_1 = 200$ mi, el cual se va a transferir a una órbita circular a una altura $h_2 = 500$ mi, determine a) el incremento de rapidez requerido en A y B, b) la energía total por unidad de masa requerida para ejecutar la transferencia.

13.106 Durante un desfile aéreo la velocidad de una nave espacial es 10.4 km/s cuando alcanza su altura mínima de 990 km sobre la superficie terrestre en el punto A. En el punto B se observa que la nave tiene una altura de 8350 km. Determine a) la magnitud de la velocidad en el punto B, b) el ángulo ϕ_B .

13.107 Una plataforma espacial se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 300 km. Cuando la plataforma pasa por A, un cohete que lleva un satélite de comunicación se lanza desde la plataforma con una velocidad relativa de 3.44 km/s de magnitud en una dirección tangente a la órbita de la plataforma. Esto se hizo para poner al cohete en una órbita de transferencia elíptica al colocarlo en el punto B, donde el cohete sería encendido de nuevo para situar al satélite en una órbita geosíncrona de 42140 km de radio. Después del lanzamiento se descubrió que la velocidad relativa que se impartió al cohete era demasiado grande. Determine el ángulo γ al cual el cohete cruzará la órbita intentada en el punto C.

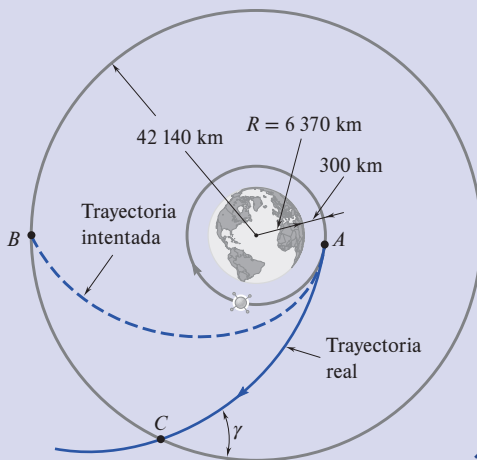


Figura P13.107

13.108 Se lanza un satélite al espacio con una velocidad v_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra mediante la última etapa de su cohete

de lanzamiento. La velocidad v_0 se diseñó para enviar el satélite a una órbita circular de radio r_0 . Sin embargo, debido a un mal funcionamiento del control, el satélite no se lanzó de manera horizontal sino a un ángulo α con la horizontal y, como consecuencia, se impulsó hacia una órbita elíptica. Determine los valores máximo y mínimo de la distancia del centro de la Tierra al satélite.

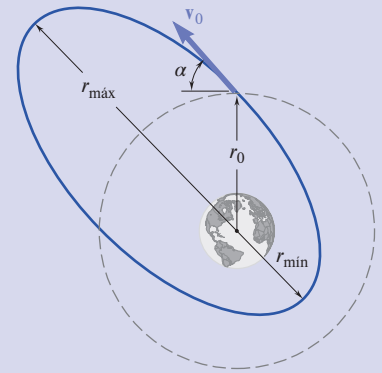


Figura P13.108

- 13.109** Un vehículo espacial debe reunirse con un laboratorio en órbita que gira alrededor de la Tierra a una altitud constante de 360 km. La nave alcanzó una altitud de 60 km cuando se apaga su motor y su velocidad v_0 forma un ángulo $\phi_0 = 50^\circ$ con respecto a la vertical OB en ese momento. ¿Qué magnitud debe tener v_0 si la trayectoria de la nave debe ser la tangente en A con respecto a la órbita del laboratorio?

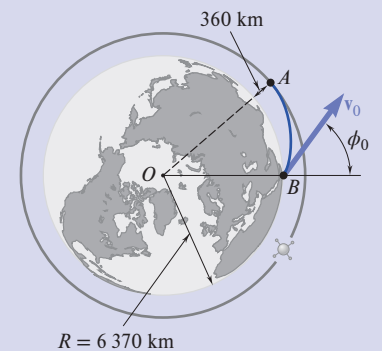


Figura P13.109

- 13.110** Un vehículo espacial se encuentra en una órbita circular a una altura de 225 mi sobre la Tierra. Para aterrizar disminuye su rapidez cuando pasa por A encendiendo su motor durante un breve lapso en una dirección opuesta a la dirección de su movimiento. Si se sabe que la velocidad del vehículo espacial debe formar un ángulo $\phi_B = 60^\circ$ con la vertical cuando llegue al punto B a una altura de 40 mi, determine a) la rapidez requerida del vehículo cuando abandona su órbita circular en A , b) su rapidez en el punto B .

- *13.111** En el problema 13.110 la rapidez del vehículo espacial se redujo cuando pasó por A y activó su motor en una dirección opuesta a la dirección de movimiento. Una estrategia alterna para sacar el vehículo espacial de su órbita circular sería girarlo de manera que su motor apuntara alejándose de la Tierra y darle después una velocidad incremental Δv_A hacia el centro O de la Tierra. Esto requeriría probablemente un gasto más pequeño de energía cuando se encendiera el motor en A , pero podría provocar un descenso demasiado rápido en B . Suponiendo que se recurre a esta estrategia con solo 50% del gasto de energía correspondiente al problema 13.110, determine los valores resultantes de ϕ_B y v_B .

- 13.112** Muestre que los valores v_A y v_P de la rapidez de un satélite terrestre en el apogeo A y en el perigeo P de una órbita elíptica se definen mediante las relaciones

$$v_A^2 = \left(\frac{2GM}{r_A + r_P} \right) \frac{r_P}{r_A} \quad v_P^2 = \left(\frac{2GM}{r_A + r_P} \right) \frac{r_A}{r_P}$$

donde M es la masa de la Tierra y r_A y r_P representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra.

- 13.113** Muestre que la energía total E de un satélite terrestre de masa m que describe una órbita elíptica es $E = -GMm/(r_A + r_P)$, donde M es la masa de la Tierra, y r_A y r_P representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra (recuerde que la energía potencial gravitacional del satélite se definió igual a cero a una distancia infinita de la Tierra).

- *13.114** Una sonda espacial describe una órbita circular de radio nR con una velocidad v_0 alrededor de un planeta con radio R y centro O . Demuestre que a) para que la sonda deje su órbita y golpee el planeta a un ángulo θ con la vertical, su velocidad puede reducirse a αv_0 , donde

$$\alpha = \sin \theta \sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

b) la sonda no golpeará al planeta si α es mayor que $\sqrt{2/(1+n)}$.

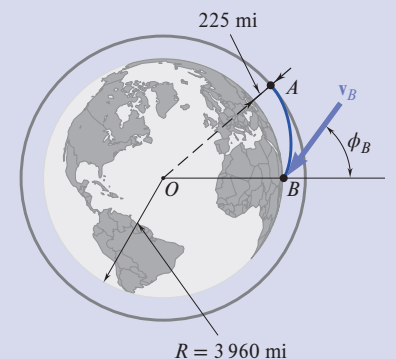


Figura P13.110

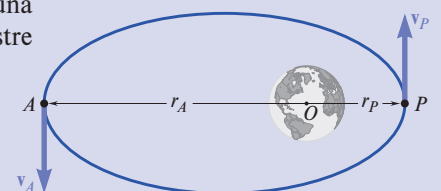


Figura P13.112 y P13.113

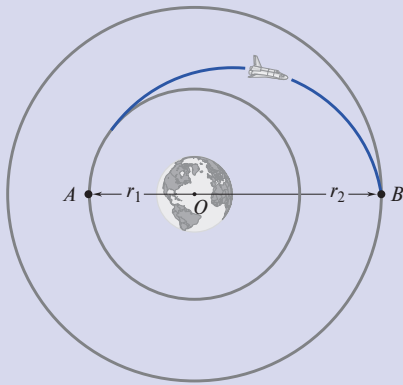


Figura P13.116

- 13.115** Se lanza un misil desde el suelo con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo ϕ_0 con la vertical. Si va a alcanzar una altura máxima igual a αR , donde R es el radio de la Tierra, *a*) muestre que el ángulo requerido ϕ_0 se define mediante la relación

$$\sin \phi_0 = (1 + \alpha) \sqrt{1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_0} \right)^2}$$

donde v_{esc} es la velocidad de escape, *b*) determine el intervalo de valores permisibles de v_0 .

- 13.116** Una nave espacial de masa m describe una órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra. *a*) Muestre que la energía adicional ΔE que debe impartirse a la nave espacial para transferirla a una órbita circular de radio r_2 mayor es

$$\Delta E = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1r_2}$$

donde M es la masa de la Tierra. *b*) Demuestre además que si la transferencia entre órbitas circulares se ejecuta al colocar la nave espacial sobre una trayectoria semielíptica de transición AB , las cantidades de energía ΔE_A y ΔE_B que deben impartirse en A y B son, respectivamente, proporcionales a r_2 y r_1 :

$$\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Delta E \quad \Delta E_B = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Delta E$$

- *13.117** Utilice las respuestas obtenidas en el problema 13.108 para mostrar que la órbita circular intentada y que la órbita elíptica resultante se intersecan en los extremos del eje menor de la órbita elíptica.

- *13.118** *a*) Exprese en términos de r_{min} y v_{max} la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, h , y la energía total por unidad de masa, E/m , de un vehículo espacial que se mueve bajo la atracción gravitatoria de un planeta de masa M (figura 13.15). *b*) Eliminando v_{max} entre las ecuaciones obtenidas, deduzca la fórmula

$$\frac{1}{r_{\text{min}}} = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{GM} \right)^2} \right]$$

c) Demuestre que la excentricidad ε de la trayectoria del vehículo puede expresarse como

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{GM} \right)^2}$$

d) Además, muestre que la trayectoria del vehículo es una hipérbola, una elipse o una parábola, dependiendo de si E es positivo, negativo o cero, respectivamente.

13.3 IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

A continuación se considerará un tercer método básico útil para la solución de problemas que involucran movimiento de partículas. Este método se basa en el principio del impulso y la cantidad de movimiento, y se usa para resolver problemas que implican fuerza, masa, velocidad y tiempo. Es de particular interés en la resolución de problemas que implican movimiento impulsivo e impacto (secciones 13.3B y 13.4).

13.3A Principio del impulso y la cantidad de movimiento

Considere una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$. Como se vio en la sección 12.1B, la segunda ley de Newton puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (13.27)$$

donde $m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (13.27) por dt e integrar a partir del tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 , se escribe

$$\mathbf{F} dt = d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

Al mover $m\mathbf{v}_1$ al lado izquierdo de esta ecuación da

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 \quad (13.28)$$

La integral en la ecuación (13.28) es un vector conocido como **impulso lineal**, o simplemente **impulso**, de la fuerza $\mathbf{F}$ durante el intervalo considerado. Al descomponer $\mathbf{F}$ en componentes rectangulares, se escribe

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

$$= \mathbf{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \mathbf{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \mathbf{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \quad (13.29)$$

y se advierte que las componentes del impulso de la fuerza $\mathbf{F}$ son, respectivamente, iguales a las áreas bajo las curvas que se obtienen al graficar las componentes F_x , F_y y F_z en función de t (figura 13.16). En el caso de una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud y dirección constantes, el impulso se representa mediante el vector $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que $\mathbf{F}$.

Si se usan unidades del SI, la magnitud del impulso de una fuerza se expresa en N·s. Sin embargo, al recordar la definición del newton, se tiene

$$\text{N} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$$

que es la unidad que se obtuvo en la sección 12.1C para la cantidad de movimiento lineal de una partícula. De tal modo, se verifica que la ecuación (13.28) es dimensionalmente correcta. Si se usan unidades de uso común en Estados Unidos, el impulso de una fuerza se expresa en lb·s, la cual es también la unidad que se obtuvo en la sección 12.1C para la cantidad de movimiento lineal de una partícula.

La ecuación (13.28) expresa que cuando sobre una partícula actúa una fuerza $\mathbf{F}$ durante un intervalo dado, **la cantidad de movimiento final $m\mathbf{v}_2$ de la partícula puede obtenerse al sumar vectorialmente su cantidad de movimiento inicial $m\mathbf{v}_1$ y el impulso de la fuerza $\mathbf{F}$ durante el intervalo considerado.** Se escribe

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

$$m\mathbf{v}_1 + \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.30)$$

La figura 13.17 es una representación gráfica de este principio y se denomina diagrama de *impulso-cantidad de movimiento*. Para obtener una solución analítica, es necesario entonces sustituir la ecuación (13.30) por las correspondientes ecuaciones de componentes. Adviértase que si bien la energía cinética y el trabajo son cantidades escalares, la cantidad de movimiento y el impulso son cantidades vectoriales.



Fotografía 13.4 Con esta prueba de impacto entre un F-4 Phantom y un objetivo rígido reforzado se determinó la fuerza del impacto en función del tiempo. ©Sandia National Laboratories/ Getty Images

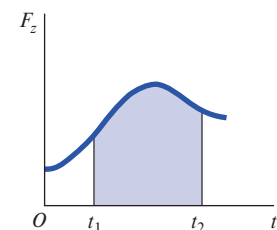
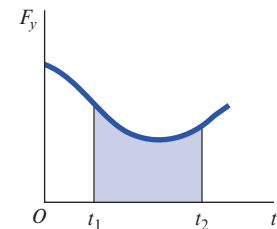
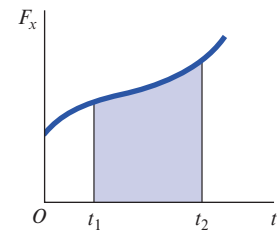


Figura 13.16 Componentes del impulso de una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa desde el tiempo t_1 a t_2 .

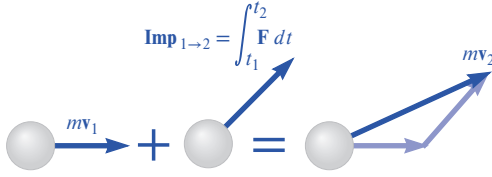


Figura 13.17 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento inicial más el impulso de una fuerza $\mathbf{F}$ equivale a dicha cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned} (mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= (mv_x)_2 \\ (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= (mv_y)_2 \\ (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt &= (mv_z)_2 \end{aligned} \quad (13.31)$$

Cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas. Se tiene

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

De nuevo, la ecuación que se obtuvo representa una relación entre cantidades vectoriales; en la solución real de un problema, esta debe sustituirse por las correspondientes ecuaciones de las componentes.

Cuando un problema incluye dos o más partículas, cada partícula puede considerarse por separado y la ecuación (13.32) se escribe para cada partícula. También es posible sumar vectorialmente las cantidades de movimiento de todas las partículas y los impulsos de todas las fuerzas implicadas. Se escribe entonces

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.33)$$

Debido a que las fuerzas de acción y reacción ejercidas por las partículas entre sí forman pares de fuerzas iguales y opuestas, y dado que el intervalo de t_1 a t_2 es común para todas las fuerzas implicadas, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y solo necesitan ser considerados los impulsos de las fuerzas externas.[†]

Si no se ejerce fuerza externa sobre las partículas o, de manera más general, si la suma de las fuerzas externas es cero, el segundo término en la ecuación (13.33) se anula y la ecuación se reduce a

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

Para dos partículas A y B , se escribe

$$m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B = m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B \quad (13.34')$$

donde $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ representan las velocidades de los cuerpos en el segundo tiempo. Esta ecuación expresa que **la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva**. Considere, por ejemplo, dos botes, de masa m_A y m_B , inicialmente en reposo, que están siendo jalados uno por el otro (figura 13.18). Si se ignora la resistencia del agua, las únicas fuerzas externas que actúan sobre los botes son sus pesos y las fuerzas de flotación ejercidas sobre ellos. Puesto que estas fuerzas están equilibradas, se escribe



Figura 13.18 Al ignorar la resistencia del agua, se conserva la cantidad de movimiento lineal para dos botes que se jalen entre sí.

[†] Se debe advertir la diferencia entre este enunciado y el correspondiente que se hizo en la sección 13.1C respecto al trabajo de las fuerzas de acción y reacción entre varias partículas. Si bien la suma de los impulsos de estas fuerzas siempre es cero, la suma de su trabajo es cero solo bajo circunstancias especiales, por ejemplo, cuando los diversos cuerpos implicados se conectan por medio de cuerdas o eslabones inextensibles y están, en consecuencia, restringidos a moverse a lo largo de distancias iguales.

$$\begin{aligned}\Sigma m\mathbf{v}_1 &= \Sigma m\mathbf{v}_2 \\ 0 &= m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B\end{aligned}$$

donde $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ representan las velocidades de los botes después de un intervalo finito. La ecuación obtenida indica que los botes se mueven en direcciones opuestas (uno hacia el otro) con velocidades inversamente proporcionales a sus masas.[†]

13.3B Movimiento impulsivo

Una fuerza que actúa sobre una partícula durante un breve intervalo que es lo suficientemente grande para producir un cambio definido en la cantidad de movimiento se conoce como **fuerza impulsiva** y el movimiento resultante se denomina **movimiento impulsivo**. Por ejemplo, cuando se golpea una pelota de béisbol, el contacto entre el bate y la pelota se realiza durante un intervalo Δt muy corto. Sin embargo, el valor promedio de la fuerza $\mathbf{F}_{\text{prom}}$ ejercida por el bate sobre la pelota es muy grande, y el impulso resultante $\mathbf{F}_{\text{prom}}\Delta t$ es lo suficientemente grande para cambiar el sentido de movimiento de la pelota (figura 13.19).

Cuando actúan fuerzas impulsivas sobre una partícula, la ecuación (13.32) se convierte en

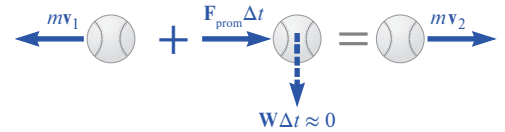


Figura 13.19 Cuando una fuerza impulsiva (es decir, una fuerza grande que actúa durante un tiempo corto) actúa sobre un sistema, a menudo es posible ignorar las fuerzas no impulsivas, como el peso.

Principio de impulso-cantidad de movimiento para el movimiento impulsivo

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}_{\text{prom}}\Delta t = m\mathbf{v}_2 \quad (13.35)$$

Es posible ignorar cualquier fuerza que no sea una fuerza impulsiva, puesto que el impulso correspondiente $\mathbf{F}_{\text{prom}}\Delta t$ es muy pequeño. Las fuerzas no impulsivas incluyen el peso de un cuerpo, la fuerza ejercida por un resorte o cualquier otra fuerza que se sabe que es pequeña comparada con una fuerza impulsiva. Las reacciones desconocidas quizá sean o no impulsivas; consecuentemente, sus impulsos deben incluirse en la ecuación (13.35) siempre que no se haya demostrado que se pueden ignorar. El impulso del peso de la pelota de béisbol considerada antes, por ejemplo, puede ignorarse. Si se analiza el movimiento del bate, también es factible ignorar el impulso del peso del bate. Los impulsos de las reacciones de las manos del jugador sobre el bate, sin embargo, deberán incluirse; estos impulsos no serán despreciables si la pelota se golpea de manera incorrecta.

Adviértase que el método del impulso y la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el análisis del movimiento impulsivo de una partícula, ya que implica solo las velocidades inicial y final de la partícula y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la misma. Por otro lado, la aplicación directa de la segunda ley de Newton requeriría la determinación de las fuerzas como funciones del tiempo y la integración de las ecuaciones de movimiento sobre el intervalo Δt .

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, es posible usar la ecuación (13.33), la cual se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}_{\text{prom}}\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.36)$$

donde el segundo término implica solo fuerzas impulsivas externas. Si todas las fuerzas externas que actúan sobre las diversas partículas son no impulsivas, se anula el

[†] Los signos de igualdad azules usados en la figura 13.18 y en el resto de este capítulo se usan para expresar que dos sistemas de vectores son *equipolentes*, es decir, que tienen la misma resultante y momento resultante (véase la sección 3.4B). Los signos de igualdad grises se seguirán usando para indicar que los dos sistemas de vectores son *equivalentes*, esto es, que tienen el mismo efecto. Esto y el concepto de conservación de cantidad de movimiento para un sistema de partículas se estudiarán con gran detalle en el capítulo 14.

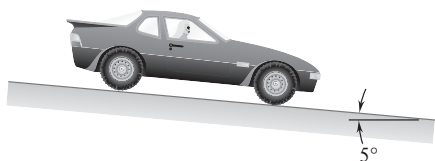
segundo término en la ecuación (13.36) y esta ecuación se reduce a la ecuación (13.34). Se escribe

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

O para dos partículas

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B \quad (13.34')$$

En otras palabras la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando dos partículas que se mueven libremente chocan entre sí. Sin embargo, se debe advertir que mientras se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas, su energía total *no* se conserva en general. Los problemas que implican el choque o *impacto* de dos partículas se estudiarán con detalle en la sección 13.4.



Problema modelo 13.13

Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre los neumáticos) de 1 500 lb. Determine el tiempo que se requiere para que el automóvil se detenga.

ESTRATEGIA: Dado que se cuenta con velocidades en dos momentos distintos, debe utilizarse el principio de impulso y cantidad de movimiento.

MODELAR: Seleccionar el automóvil como su sistema y suponer que puede modelarse como una partícula. La figura 1 ilustra el diagrama de impulso y cantidad de movimiento.

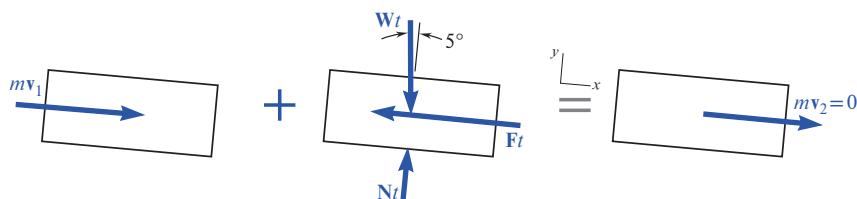


Figura 1 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento del automóvil.

ANALIZAR: El principio de impulso y cantidad de movimiento es

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

Se trata de una ecuación vectorial y dado que la fuerza impulsiva es constante es simplemente igual a la fuerza por su duración en el tiempo. Pueden obtenerse ecuaciones escalares utilizando la figura 1. En la dirección y hacia abajo del plano inclinado se obtiene

$$\begin{aligned} + \searrow \text{componentes: } mv_1 + (W \sen 5^\circ)t - Ft &= 0 \\ (4\,000/32.2)(88 \text{ pies/s}) + (4\,000 \sen 5^\circ)t - 1\,500t &= 0 \end{aligned} \quad t = 9.49 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

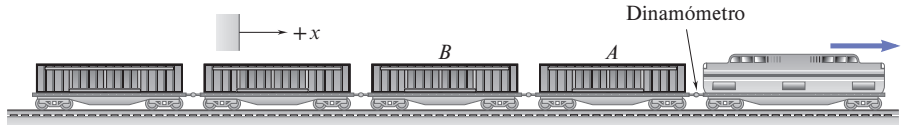
REVISAR y PENSAR: Debe utilizarse la segunda ley de Newton para resolver este problema. En primer lugar, se debe determinar la desaceleración del automóvil y luego separar las variables e integrar $a = dv/dt$ para relacionar la velocidad, la desaceleración y el tiempo. No es posible utilizar la conservación de la energía para resolver este problema porque ese principio no incluye el tiempo.

Problema modelo 13.14

Para determinar el peso de un tren de carga con 40 vagones idénticos, un ingeniero coloca un dinamómetro entre el tren y la locomotora. El tren arranca desde el reposo, se desplaza por una vía recta y nivelada y alcanza una rapidez de 30 mi/h después de tres minutos. Durante dicho intervalo, la lectura promedio del dinamómetro es 120 toneladas. Si se sabe que el coeficiente efectivo de fricción del sistema es 0.03 y la resistencia del aire es insignificante, determine *a*) el peso del tren (en ton), *b*) la fuerza de acople entre los vagones *A* y *B*.



©Don Farrall/Stockbyte/Getty Images



ESTRATEGIA: Este problema puede resolverse mediante la segunda ley de Newton y las relaciones cinéticas, pero dado que se cuenta con dos velocidades en dos tiempos y se pide hallar la fuerza, también se puede utilizar el impulso y la cantidad de movimiento.

MODELAR: Seleccionar los 40 vagones detrás del motor como sistema. La figura 1 ilustra un diagrama de impulso-cantidad de tiempo para este sistema, donde $\mathbf{F}$ es la fuerza del dinamómetro.

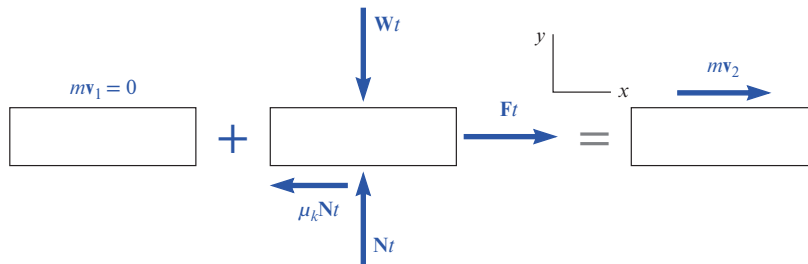


Figura 1 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento de los 40 vagones.

ANALIZAR: El principio de impulso-cantidad de movimiento es

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

Se pueden obtener ecuaciones escalares utilizando la figura 1 y observando las direcciones x y y .

$$+\uparrow \text{ componentes } y: \quad N_t - W_t = 0 \quad N = W$$

$$\rightarrow \text{ componentes } x: \quad 0 + F_t - \mu_k N_t = mv_2$$

$$0 + (120 \text{ ton})(2000 \text{ lb/ton})(180 \text{ s}) - 0.03(W)(180 \text{ s}) \\ = \left(\frac{W}{32.2 \text{ pies/s}^2} \right) (30 \text{ mi/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) \left(\frac{5280 \text{ pies}}{\text{mi}} \right)$$

Al resolver para hallar W , se obtiene

$$W = 6.384 \times 10^6 \text{ lb} = 3190 \text{ ton} \quad \blacktriangleleft$$

Fuerza de acople entre los vagones *A* y *B*. Se debe definir un nuevo sistema donde la fuerza de interés sea una fuerza externa. Por tanto, seleccione el vagón *A* como sistema y defina F_A como el acople entre los vagones *A* y *B*. La figura 2 ilustra un diagrama de impulso-cantidad de movimiento.

(continúa)

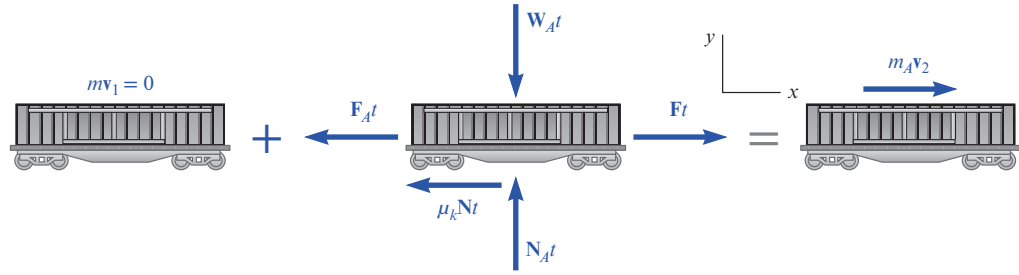


Figura 2 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el vagón A.

Dado que todos los vagones pesan lo mismo, el peso de A es $W_A = W/40 = 159\,600$ lb. Al aplicar el impulso-cantidad de movimiento en la dirección y, se obtiene $N_A = W_A$. Al considerar la dirección x,

$$\rightarrow \text{componentes } x: \quad 0 + Ft - \mu_k N_A t - F_A t = m_A v_2$$

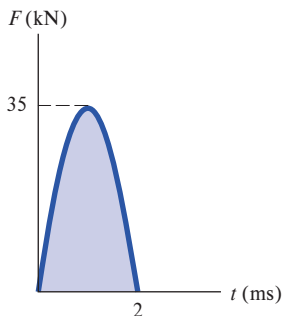
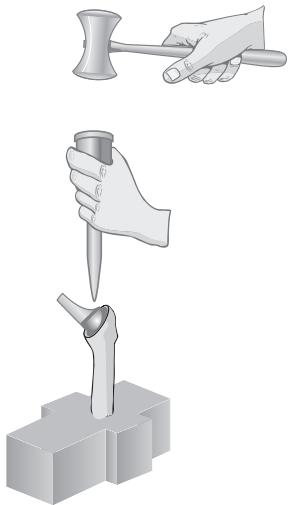
Al sustituir los números y resolver para F_A se obtiene

$$F_A = 117.0 \text{ ton} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En lugar de usar A como sistema, podría haber seleccionado los 39 vagones restantes como sistema. En dicho caso, se hallaría

$$0 - \mu_k N_{39} t + F_A t = m_{39} v_2$$

donde N_{39} y m_{39} son la fuerza normal y la masa, respectivamente, para los 39 vagones restantes. La respuesta, como es de esperarse, es la misma.



Problema modelo 13.15

Un cirujano utiliza un martillo y un punzón para insertar un implante de cadera. Para comprender mejor este proceso, se inserta un implante instrumentado en una réplica fija de un fémur. La fuerza de resistencia hacia arriba que ejerce la réplica del fémur sobre el implante de cadera puede ignorarse durante el impacto y la fuerza del impacto del punzón puede ser aproximadamente de media onda senoidal. Determine la rapidez del implante de 0.3 kg inmediatamente después del impacto.

ESTRATEGIA: Dado que se relaciona fuerza, tiempo y velocidades, debe utilizarse el principio del impulso y la cantidad de movimiento.

MODELAR: Se selecciona el implante como sistema. La figura 1 ilustra un diagrama de impulso-cantidad de movimiento para este sistema. La fuerza de resistencia no se incluye en la figura 1 dado que se considera que puede ignorarse.

ANALIZAR: El principio de impulso-cantidad de movimiento es

$$mv_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = mv_2$$

Pueden obtenerse ecuaciones escalares al observar las componentes verticales.

$$+\uparrow \text{ componentes } y: \quad 0 + \int_0^t F(t) dt = mv_2 \quad (1)$$

(continúa)

donde

$$\int_0^t F(t) dt = \int_0^{0.002} 35\,000 \sin\left(\frac{2\pi}{0.004}t\right) dt = -35\,000 \frac{0.004}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{0.004}t\right)_0^{0.002}$$

$$= 44.56 \text{ N}\cdot\text{s}$$

Al sustituir esto en la ecuación (1) y resolver para hallar v_2 se obtiene

$$v_2 = \frac{\int_0^t F(t) dt}{m} = \frac{44.56 \text{ N}\cdot\text{s}}{0.3 \text{ kg}}$$

$$v_2 = 148.5 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Este problema es similar al problema modelo 13.5, donde el martillo de caída libre golpea el pilote, luego, el martillo y el pilote se desplazan hacia abajo y la tierra resiste el movimiento. En ese problema, se analizó el movimiento *después* del impacto, en este problema se analiza el movimiento *durante* el impacto. En realidad será necesario realizar algunas mediciones experimentales para determinar si la fuerza de resistencia es realmente insignificante durante el impacto. Si se conociera la relación de fuerza del fémur sobre el implante, podría resolver este problema en dos partes para hallar primero la velocidad del implante inmediatamente después del impacto mediante el principio de impulso-cantidad de movimiento y, posteriormente, determinar cuán lejos se mueve el implante dentro del fémur mediante el principio del trabajo y la energía.

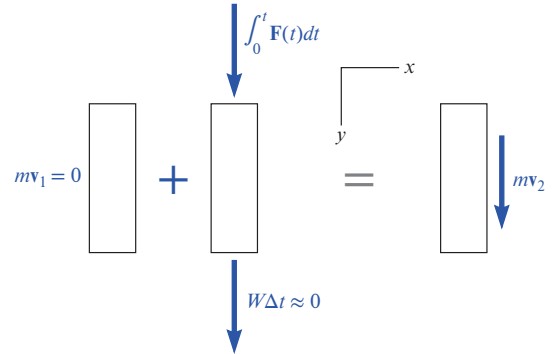


Figura 1 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el implante.

Problema modelo 13.16

Una pelota de béisbol de 4 oz se lanza con una velocidad de 80 pies/s hacia un bateador. Después de que la bola es golpeada por el bate B , adquiere una velocidad de 120 pies/s en la dirección que se indica. Si el bate y la bola están en contacto 0.015 s, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la pelota durante el impacto.

ESTRATEGIA: Esta situación presenta un choque y, por tanto, fuerzas impulsivas, por lo que debe aplicarse el principio de impulso y cantidad de movimiento a la pelota.

MODELAR: Seleccionar la pelota como sistema y tratarla como una partícula. La figura 1 ilustra el diagrama de impulso-cantidad de fuerza. Dado que el peso de la pelota es una fuerza no impulsiva que en general es mucho menor que la fuerza impulsiva, puede ignorarse.

ANALIZAR: Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento.

$$mv_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = mv_2$$

Al aplicar lo anterior en las direcciones x y y queda

↗ componentes x :

$$-mv_1 + F_x \Delta t = mv_2 \cos 40^\circ$$

$$-\frac{4}{32.2}(80 \text{ pies/s}) + F_x(0.015 \text{ s}) = \frac{4}{32.2}(120 \text{ pies/s}) \cos 40^\circ$$

$$F_x = +89.0 \text{ lb}$$

(continúa)

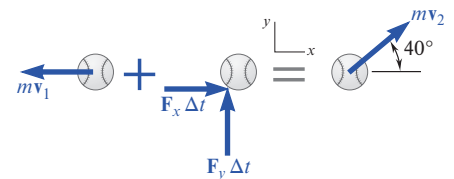
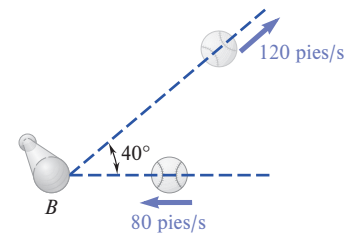


Figura 1 Diagrama de impulso-momento para la pelota.

+↑ componentes y :

$$0 + F_y \Delta t = mv_2 \text{ sen } 40^\circ$$

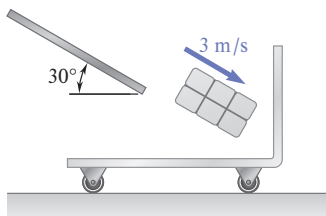
$$F_y(0.015 \text{ s}) = \frac{\frac{4}{16}}{32.2}(120 \text{ pies/s}) \text{ sen } 40^\circ$$

$$F_y = +39.9 \text{ lb}$$

A partir de sus componentes F_x y F_y se determina la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = 97.5 \text{ lb } \nearrow 24.2^\circ \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: En este problema se ignoró el impulso por el peso. Habría tenido una magnitud de $(4/16 \text{ lb})(0.015 \text{ s}) = 0.00288 \text{ lb}\cdot\text{s}$ que de hecho es mucho menor que el impulso que el bate ejerce sobre la pelota, que es $(97.4 \text{ lb})(0.015 \text{ s}) = 1.463 \text{ lb}\cdot\text{s}$.



Problema modelo 13.17

Un paquete de 10 kg cae desde una rampa a una velocidad de 3 m/s en un carro de 25 kg. Si el carro está al inicio en reposo y puede rodar libremente, determine *a*) la velocidad final del carro, *b*) el impulso ejercido por el carro sobre el paquete, *c*) la fracción de la energía inicial perdida en el impacto.

ESTRATEGIA: Dado que se cuenta con un impacto y , por tanto con fuerzas impulsivas, utilizar el principio de impulso y cantidad de movimiento.

MODELAR: Seleccionar el paquete y el carro como sistema y suponer que ambos pueden tratarse como partículas. La figura 1 ilustra un diagrama de impulso y cantidad de movimiento para este sistema. Obsérvese que existe un impulso vertical entre el carro y el piso porque el carro está limitado a moverse en sentido horizontal.

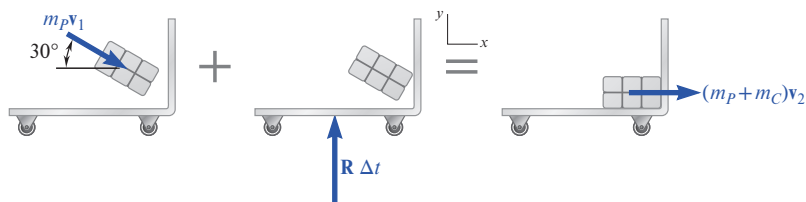


Figura 1 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el sistema.

ANALIZAR: El principio general de impulso y cantidad de movimiento es

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$$

a) Paquete y carro. Al aplicar este principio en la dirección x , se obtiene

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{componentes } x: \quad m_P v_1 \cos 30^\circ + 0 &= (m_P + m_C) v_2 \\ (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ &= (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg}) v_2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_2 = 0.742 \text{ m/s } \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

En la figura 1 la fuerza entre el paquete y el carro no se muestra porque es interna del sistema definido. A fin de determinar esta fuerza se requiere un nuevo sistema; es decir, solo el paquete. La figura 2 ilustra el diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el paquete solo.

(continúa)

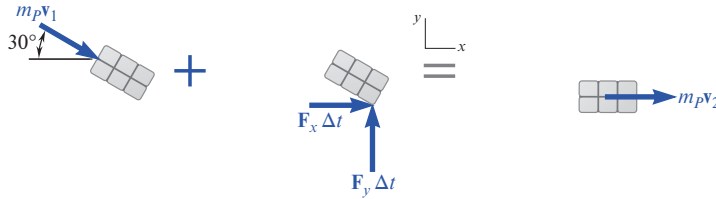


Figura 2 Diagrama de impulso-cantidad de tiempo del paquete.

b) Principio del impulso-cantidad de movimiento: paquete. El paquete se traslada en ambas direcciones x y y , por lo que se deben escribir las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento para cada componente del movimiento.

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{componentes } x: \quad & -mv_1 + F_x \Delta t = mv_2 \\ & (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ + F_x \Delta t = (10 \text{ kg})(0.742 \text{ m/s}) \\ & F_x \Delta t = -18.56 \text{ N}\cdot\text{s} \\ +\uparrow \text{componentes } y: \quad & -m_P v_1 \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0 \\ & -(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0 \\ & F_y \Delta t = +15 \text{ N}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

El impulso ejercido sobre el paquete es $\mathbf{F} \Delta t = 23.9 \text{ N}\cdot\text{s} \angle 38.9^\circ$ ◀

c) Fracción de la energía perdida. Las energías inicial y final son

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_P v_1^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 45 \text{ J} \\ T_2 &= \frac{1}{2} (m_P + m_C) v_2^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg})(0.742 \text{ m/s})^2 = 9.63 \text{ J} \end{aligned}$$

La fracción de energía perdida es $\frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{45 \text{ J} - 9.63 \text{ J}}{45 \text{ J}} = 0.786$ ◀

REVISAR y PENSAR: Con excepción del caso netamente teórico de un choque “perfectamente elástico”, la energía mecánica nunca se conserva en un choque entre dos objetos, aunque la cantidad de movimiento lineal puede conservarse. Obsérvese que en este problema la cantidad de movimiento se conservó en la dirección x , pero no en la dirección y por el impulso vertical sobre las ruedas del carro. Cuando sea necesario trabajar con un impacto, se deben utilizar los métodos de impulso-cantidad de movimiento.

ESTUDIO DE CASO 13.1

Los operadores de parques de atracciones se esfuerzan continuamente por lograr atracciones más emocionantes. Suponga que ha sido contratado para diseñar una montaña rusa que rompa los récords actuales de altura total y altura de un bucle (en la fotografía EC 13.1 se muestra un bucle de inversión). El diseño utiliza un sistema hidráulico para lanzar los vagones de 6 000 kg por una sección llamada sombrero de copa (véase la fotografía EC 13.2) que tiene una altura $h_A = 200 \text{ m}$ sobre la plataforma de lanzamiento. Las autoridades del parque han solicitado las siguientes especificaciones para el perfil de la atracción que se muestra en la figura EC 13.1: 1) en la cresta del sombrero de copa (posición A), los pasajeros sentirán ingravidez (es decir, la fuerza normal sobre ellos será cero), 2) en la parte superior del bucle de inversión (posición B), la fuerza normal sobre los pasajeros será igual a cuatro veces su peso, 3) la fuerza normal sobre los pasajeros al salir del bucle de inversión (posición C) será la misma que en la parte superior del bucle.

(continúa)



Fotografía EC 13.1 Bucle de inversión en una montaña rusa. ©chaimdan/E+/Getty Images



Fotografía EC 13.2 Sección de "sombrero de copa" en una montaña rusa. ©AFP/Getty Images

Sin tener en cuenta la fricción y otras pérdidas de energía, suponiendo que la fuerza de lanzamiento es aproximadamente constante por una duración de 3 s, y cumpliendo con las especificaciones anteriores, determine *a*) la fuerza requerida para lanzar un tren de montaña rusa de 6 000 kg y sus pasajeros hasta la posición *A*, *b*) la altura del punto *B* si $\rho_B = 25$ m, *c*) el radio de curvatura ρ_C en la posición *C*, donde la pista está a 30° de la horizontal.

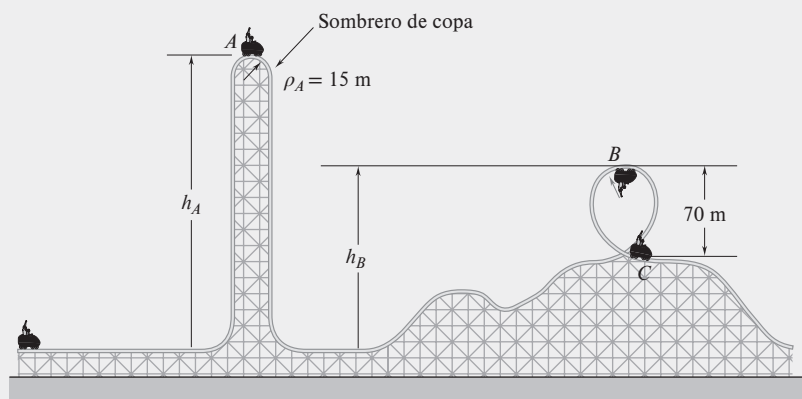


Figura EC 13.1 Perfil de la montaña rusa.

ESTRATEGIA: Primero, se encontrará la velocidad requerida en el punto *A* usando la segunda ley de Newton. A partir de esta velocidad, se puede utilizar el trabajo y la energía para determinar la velocidad v_2 al final de la plataforma de lanzamiento, y luego emplear el impulso y la cantidad de movimiento para hallar la fuerza hidráulica requerida para lograr esta velocidad. Posteriormente, es posible usar una combinación de trabajo y energía y la segunda ley de Newton para resolver los incisos *b*) y *c*).

MODELAR: Se debe modelar a un ocupante de un vagón como una partícula en la cresta del sombrero de copa para determinar la velocidad requerida en el punto *A*, y dibujar los diagramas de cuerpo libre y cinético como se muestra en la figura EC 13.2. Elabore diagramas similares para las posiciones *B* y *C*.

Modele los vagones de la montaña rusa como una partícula y dibuje el diagrama de impulso-cantidad de movimiento durante el lanzamiento de 3 s.

ANALIZAR: Es posible utilizar los diagramas cinético y de cuerpo libre de la figura EC 13.3 a fin de encontrar la velocidad necesaria para que la fuerza normal sea igual a cero en el punto *A* (los pasajeros sentirán ingravidez en este punto).

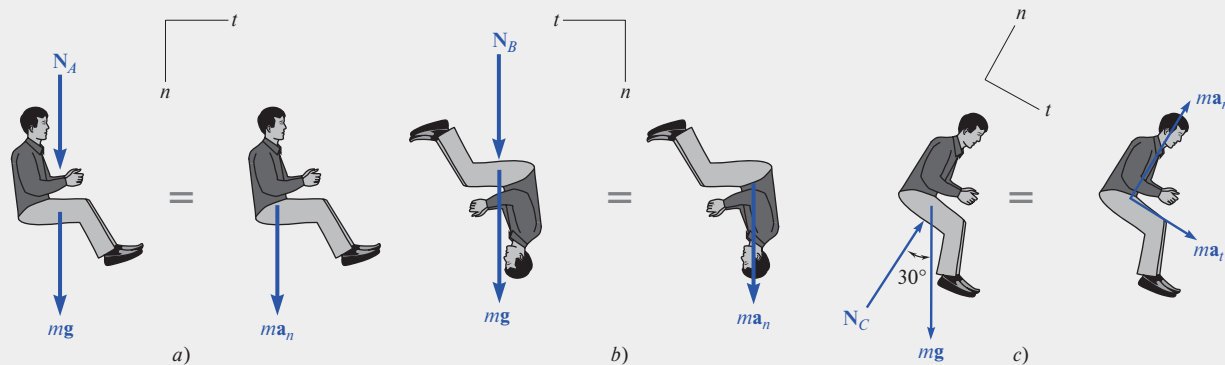


Figura EC 13.2 Diagramas cinético y de cuerpo libre de un pasajero en los puntos *A*, *B* y *C*.

(continúa)

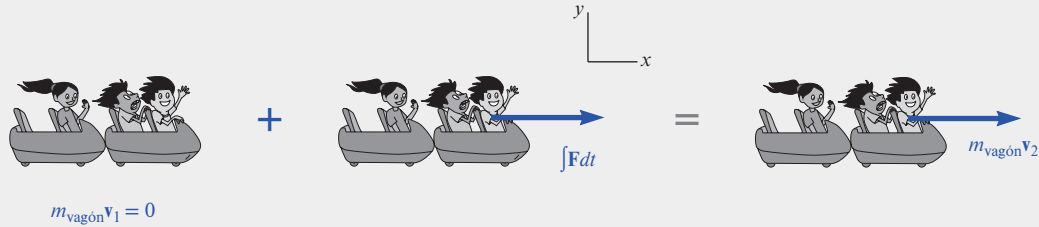


Figura EC 13.3 Diagrama impulso-cantidad de movimiento de la fase de lanzamiento.

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: N_A + mg = m \frac{v_A^2}{\rho_A}$$

Si N_A se iguala a cero y se despeja la velocidad, resulta:

$$v_A = \sqrt{g\rho_A} = \sqrt{(9.81 \text{ m/s}^2)(15 \text{ m})} = 12.131 \text{ m/s}$$

Ahora se determina la velocidad v_2 al final del área de lanzamiento utilizando la conservación de energía.

$$T_2 + V_2 = T_A + V_A: \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A$$

Si se establece el valor de referencia a la altura de lanzamiento y se sustituyen los valores, se obtiene:

$$\frac{1}{2}(600 \text{ kg})v_2^2 = \frac{1}{2}(600 \text{ kg})(12.131 \text{ m/s}^2) + (600 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(200 \text{ m})$$

$$v^2 = 63.806 \text{ m/s}$$

El impulso y la cantidad de movimiento, así como el diagrama de la figura EC 13.3, se pueden usar a fin de calcular la fuerza requerida para lograr esta velocidad:

$$m_{\text{vagón}} v_1 + \int_0^3 F dt = m_{\text{vagón}} v_A: 0 + F(3 \text{ s}) = 6000 \text{ kg} (63.806 \text{ m/s})$$

$$F = 127.6 \text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Para determinar la altura máxima del bucle de inversión, se usa la figura EC 13.2b y se sustituye en $N_B = 4mg$.

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: N_B + mg = m \frac{v_B^2}{\rho_B} \rightarrow 5mg = m \frac{v_B^2}{\rho_B}$$

Si se despeja v_B y se sustituyen valores, resulta

$$v_B = \sqrt{5g\rho_B} = \sqrt{5(9.81 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})} = 35.018 \text{ m/s}$$

Se puede usar el trabajo y la energía para determinar la altura en la parte superior del bucle de inversión:

$$T_A + V_A = T_B + V_B: \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

De nuevo, si se usa la posición de lanzamiento como el nivel de referencia y se despeja h_B , se obtiene

$$h_B = \frac{1}{2g}(v_A^2 - v_B^2) + h_A = \frac{1}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}[(12.131 \text{ m/s})^2 - (35.018 \text{ m/s})^2] + 200 \text{ m}$$

$$h_B = 145 \text{ m} \blacktriangleleft$$

(continúa)

La velocidad en la parte inferior del bucle se determina utilizando nuevamente el trabajo y la energía:

$$T_B + V_B = T_C + V_C: \quad \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C$$

En vista que las masas se cancelan (lo cual es bueno porque significa que la velocidad es independiente de la masa del pasajero) y al despejar v_C ,

$$v_C = [(35.018 \text{ m/s})^2 + 2(9.81 \text{ m/s}^2)(145 \text{ m}) - 2(9.81 \text{ m/s}^2)(145 \text{ m} - 70 \text{ m})]^{1/2}$$

$$v_C = 51.0 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

Finalmente, se puede utilizar la figura EC 13.2 para determinar el radio de curvatura necesario en la parte inferior del bucle.

$$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n: \quad N_C - mg \cos(30^\circ) = m \frac{v_C^2}{\rho_C}$$

Al despejar ρ_C , establecer $N_C = 4mg$ y sustituir valores, resulta

$$\rho_C = \frac{v_C^2}{[4 - \cos(30^\circ)]g} = \frac{(50.987 \text{ m/s})^2}{[4 - \cos(30^\circ)](9.81 \text{ m/s}^2)} = 84.557 \text{ m}$$

$$\rho_C = 84.6 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Los bucles de inversión en una montaña rusa rara vez son círculos perfectos, como se muestra en el estudio de caso actual. Por lo general, tienen la forma de un bucle de clotoide que varía el radio de curvatura para mantener una fuerza g relativamente constante sobre el pasajero. Existen estándares de la industria para la cantidad y duración de las fuerzas g que se pueden mantener durante un paseo en montaña rusa.

Los cálculos que se presentan aquí suponen que no hay pérdidas de energía por factores como la fricción, la resistencia del aire, la vibración y el ruido, por lo que los resultados realmente imponen límites al diseño de la montaña rusa (por ejemplo, necesitará más que la fuerza de empuje promedio calculada y el bucle deberá ser más bajo que h_B). ¿Cómo podría diseñarse un flotador de gravedad cero después de haber pasado por el bucle?

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se integró la segunda ley de Newton para deducir el **principio del impulso y la cantidad de movimiento** para una partícula. Si se recuerda que la cantidad de *movimiento lineal* de una partícula se definió como el producto de su masa m y su velocidad $\mathbf{v}$ (sección 12.1B), se escribe

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

Esta ecuación expresa que la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_2$ de una partícula en el tiempo t_2 puede obtenerse sumando a su cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_1$ en el tiempo t_1 los **impulsos** de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2 . Con fines de cálculo, las cantidades de movimiento y los impulsos pueden expresarse en términos de sus componentes rectangulares, y es posible sustituir la ecuación (13.32) por las ecuaciones escalares equivalentes. Las unidades de la cantidad de movimiento y del impulso son N-s en el SI y lb-s en las unidades de uso común en Estados Unidos. Para resolver problemas utilizando esta ecuación se pueden seguir estos pasos:

1. Dibujar un diagrama de impulso-cantidad de movimiento que muestre la partícula, su cantidad de movimiento en t_1 y en t_2 , y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2 .

2. Calcular el impulso de cada fuerza, expresándolo en términos de sus componentes rectangulares si está implicada más de una dirección. Es posible que encuentre los siguientes casos:

a) El intervalo es finito y la fuerza es constante.

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

b) El intervalo es finito y la fuerza es una función de t .

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$$

c) El intervalo es muy pequeño y la fuerza es muy grande. La fuerza se denomina una **fuerza impulsiva** y su impulso sobre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$ es

$$\text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{F}_{\text{prom}} \Delta t$$

Hay que observar que este impulso es cero para una fuerza no impulsiva tal como el peso de un cuerpo, la fuerza ejercida por un resorte, o cualquier otra fuerza que se sepa que es pequeña en comparación con las fuerzas impulsivas. Sin embargo, las reacciones desconocidas *no pueden suponerse* no impulsivas y sus impulsos deben tomarse en cuenta.

3. Sustituir los valores obtenidos para los impulsos en la ecuación (13.32) o en las ecuaciones escalares equivalentes. Encontrará que las fuerzas y las velocidades en los problemas de esta sección están contenidas en un plano. Por tanto, escribirá dos ecuaciones escalares y las resolverá para dos incógnitas. Estas incógnitas pueden ser un *tiempo* (problema modelo 13.13), una *fuerza* (problema modelo 13.14), una *velocidad* (problema modelo 13.15), una *fuerza impulsiva promedio* (problema modelo 13.16) o un *impulso* (problema modelo 13.17).

4. Cuando están implicadas varias partículas, debe dibujarse un diagrama independiente para cada una de ellas, en el que se muestre la cantidad de movimiento inicial y final de la partícula, así como los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre esta.

a) Sin embargo, suele ser conveniente considerar primero un diagrama que incluya a todas las partículas. Este diagrama conduce a la ecuación

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.33)$$

donde los impulsos de únicamente las fuerzas externas al sistema necesitan ser consideradas.

Por tanto, las dos ecuaciones escalares equivalentes no contendrán ninguno de los impulsos de las fuerzas internas desconocidas.

b) Si la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero, la ecuación (13.33) se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

o para dos partículas se escribe

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B \quad (13.34')$$

que expresa que *se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas*. Esto ocurre cuando el intervalo de tiempo es muy corto y todas las fuerzas externas pueden ignorarse en comparación con las fuerzas impulsivas. No obstante, hay que tener presente que es posible que se conserve la cantidad de movimiento total en una dirección, pero no en la otra (problema modelo 13.17).

Problemas

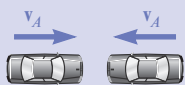
PREGUNTAS CONCEPTUALES

13.PC4 Un gran insecto impacta en el parabrisas frontal de un automóvil deportivo que viaja por una autopista. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero durante la colisión?

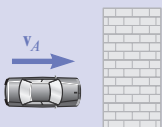
- El automóvil ejerce una fuerza mayor sobre el insecto que la que el insecto ejerce sobre él.
- El insecto ejerce una fuerza mayor sobre el automóvil que la que el automóvil ejerce sobre el insecto.
- El automóvil ejerce una fuerza sobre el insecto, pero el insecto no ejerce una fuerza sobre el automóvil.
- El automóvil ejerce la misma fuerza sobre el insecto que el insecto ejerce sobre el automóvil.
- Ninguno ejerce una fuerza sobre el otro; el insecto queda aplastado simplemente debido a que se encuentra en el camino del automóvil.

13.PC5 Los daños esperados asociados con dos tipos de choque perfectamente plásticos se van a comparar. En el primer caso, dos automóviles idénticos que viajan a la misma rapidez se impactan frontalmente uno contra el otro. En el segundo caso, el automóvil se impacta contra un muro masivo de concreto. ¿En cuál caso esperarías que el automóvil resultara más dañado?

- Caso 1.
- Caso 2.
- El mismo daño en cada caso.



Caso 1



Caso 2

Figura P13.PC5

PROBLEMAS DE PRÁCTICA DE DIAGRAMA DE IMPULSO-MOMENTO

13.F1 La velocidad inicial del bloque en posición *A* es 30 pies/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.30$. Dibuje el diagrama de impulso-momento que puede utilizarse para determinar el tiempo que tarda el bloque en alcanzar *B* con velocidad cero, si $\theta = 20^\circ$.

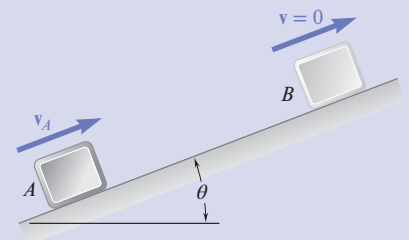


Figura P13.F1

13.F2 Sobre un collarín de 4 lb que puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción actúa una fuerza *P* que varía en magnitud como se indica. Si se sabe que el collarín está inicialmente en reposo, dibuje el diagrama de impulso-momento que puede usarse para determinar su velocidad en $t = 3$ s.

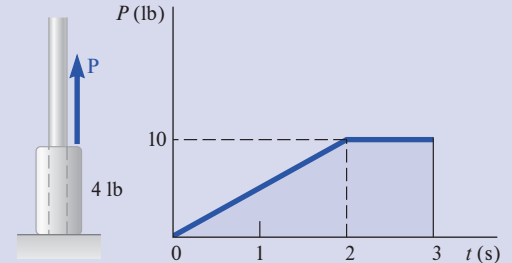


Figura P13.F2

13.F3 Se sostiene una maleta *A* de 15 kg contra un extremo de un maletero *B* de 40 kg y se evita que deslice hacia abajo por medio de otra maleta. Cuando el maletero se descarga y se quita el último baúl pesado, la maleta se desliza y provoca que el maletero de 40 kg se mueva hacia la izquierda con una velocidad v_B de magnitud 0.8 m/s. Ignore la fricción y dibuje los diagramas de impulso-momento que pueden usarse para determinar a) la velocidad de *A* cuando esta rueda sobre el maletero, b) la velocidad del maletero después de que la maleta golpea el lado derecho del mismo sin rebotar.

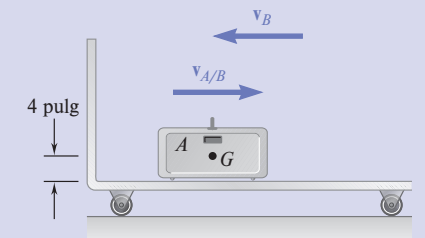
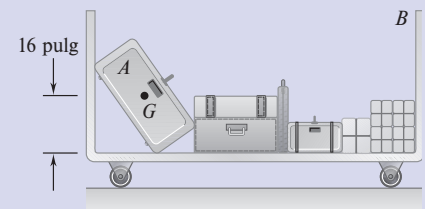


Figura P13.F3

13.F4 El automóvil *A* estaba viajando a una rapidez de 15 m/s y el automóvil *B* lo hacía hacia el norte con una rapidez desconocida cuando tuvieron un alcance en una intersección. Luego de la investigación se encontró que después del choque los dos automóviles quedaron pegados y patinaron a un ángulo de 50° noreste. Puesto que las masas de *A* y *B* son m_A y m_B , respectivamente, dibuje el diagrama de impulso-momento que pueda usarse para determinar la velocidad de *B* antes del impacto.

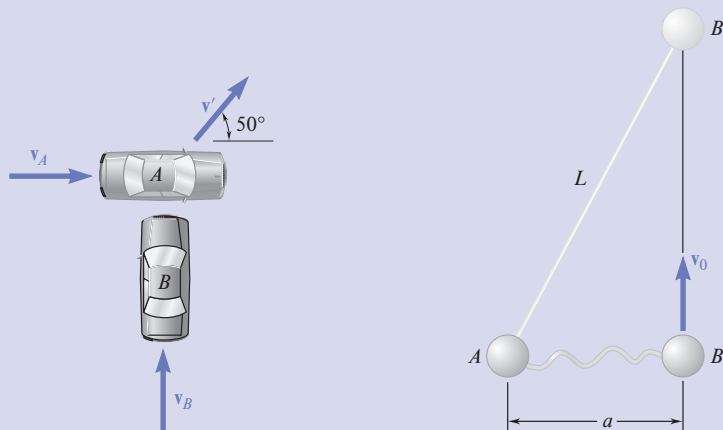


Figura P13.F4

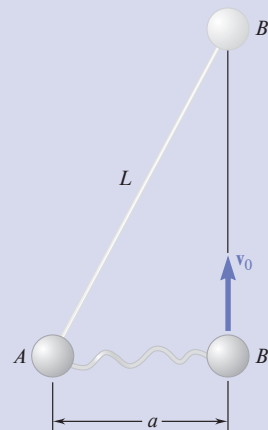


Figura P13.F5

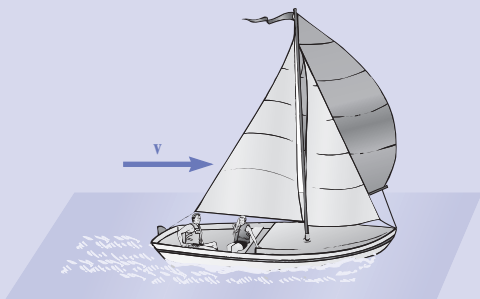


Figura P13.121

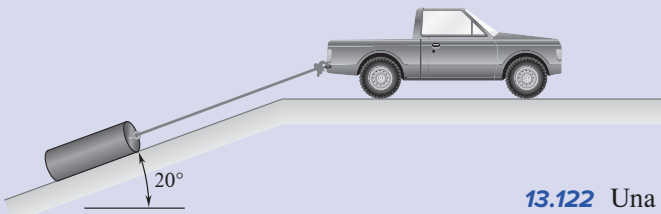


Figura P13.122

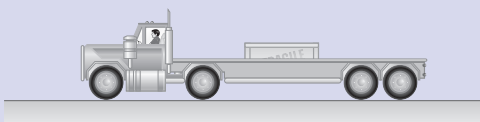


Figura P13.123

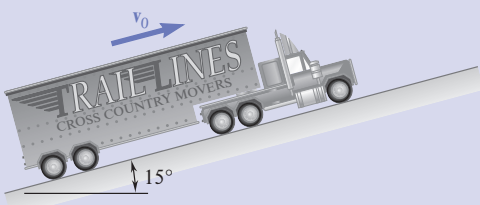


Figura P13.124



Figura P13.126

©U.S. Air Force photo/Samuel King Jr.

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

13.119 Un trasatlántico de 35 000 Mg tiene una velocidad inicial de 4 km/h. Si se desprecia la resistencia por fricción del agua, determine el tiempo requerido para llevar al trasatlántico al reposo usando un solo remolcador que ejerce una fuerza de 150 kN.

13.120 Un automóvil de 2 500 lb se mueve a una rapidez de 60 mi/h cuando los frenos se aplican por completo, lo que ocasiona que las cuatro llantas patinen. Determine el tiempo requerido para detener el automóvil *a*) sobre pavimento seco ($\mu_k = 0.75$), *b*) sobre un camino congelado ($\mu_k = 0.10$).

13.121 Un velero que pesa 980 lb con sus ocupantes navega viento abajo a 8 mi/h cuando su vela se eleva para incrementar su rapidez. Determine la fuerza neta proporcionada por la vela sobre el intervalo de 10 s que tarda el bote en alcanzar una rapidez de 12 mi/h.

13.122 Una camioneta remolca un tronco de 300 kg de una cuneta mediante un malacate unido a su parte trasera. Si se sabe que el malacate aplica una fuerza constante de 2 500 N y el coeficiente de fricción cinética entre el suelo y el tronco es de 0.45, determine el tiempo necesario para que el tronco alcance una rapidez de 0.5 m/s.

13.123 Los coeficientes de fricción entre la carga y el tráiler que se ilustra son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.35$. Si se sabe que la rapidez del vehículo es de 55 mi/h, determine el tiempo más corto durante el cual el vehículo podrá frenar sin que la carga se mueva.

13.124 Se construyen rampas de seguridad inclinadas al lado de autopistas de montaña para permitir que se detengan los vehículos con frenos defectuosos. Un camión de 10 ton entra a una rampa de 15° a una alta rapidez $v_0 = 108$ pies/s y viaja durante 6 s antes de que su rapidez se reduzca a 36 pies/s. Suponiendo desaceleración constante, determine *a*) la magnitud de la fuerza de frenado, *b*) el tiempo adicional que se requiere para que el camión se detenga. Ignore la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.125 Lo que sujeta al equipaje sobre el piso del vagón de equipaje de un tren de alta rapidez es la fricción. El tren descien-
de por una pendiente de 5% cuando reduce su rapidez a una tasa constante de 120 mi/h hasta 60 mi/h en un intervalo de 12 s. Determine el valor permisible más pequeño del coeficiente de fricción estática entre un baúl en el piso del vagón de equipaje si el baúl no va a deslizarse.

13.126 El F-35B de 18 000 kg utiliza la vectorización del empuje para permitirle despegar verticalmente. En una maniobra, el piloto alcanza el punto más alto de su planeo estático a los 200 m. El empuje combinado con la fuerza de sustentación del avión aplicados al finalizar el planeo estático puede expresarse como $\mathbf{F} = (44t + 2\,500t^2)\mathbf{i} + (250t^2 + t + 176\,580)\mathbf{j}$, donde $\mathbf{F}$ y t están expresados en newtons y se-

gundos, respectivamente. Determine *a*) cuánto demoraría el avión en alcanzar la rapidez crucero de 1 000 km/h (se define que la rapidez crucero es solo en la dirección x), *b*) la altitud del avión en este momento.

13.127 Un camión desciende sobre un camino con pendiente de 4% a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos para frenarlo hasta 20 mi/h. Un sistema de frenado antiderrapante limita la fuerza de frenado a un valor en el cual los neumáticos del camión están a punto de patinar. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos es igual a 0.60, determine el tiempo más corto necesario para que el camión se frene.

13.128 En anticipación a una larga subida de 6° , un conductor de autobús acelera a una tasa constante de 80 km/h a 100 km/h en 8 s mientras todavía se encuentra en una sección nivelada de la carretera. Si se sabe que la rapidez del autobús es de 100 km/h al comenzar a tomar la subida en el tiempo $t = 0$ y que el conductor no modifica la aceleración ni el cambio, determine *a*) la rapidez del autobús cuando $t = 10$ s, *b*) el tiempo cuando la rapidez es de 60 km/h.

13.129 El tren subterráneo que se muestra en la figura viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando se aplican los frenos por completo en las ruedas de los vagones *B* y *C*, lo que hace que se deslicen sobre la vía. Los frenos no se aplican a las ruedas del vagón *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y la vía es 0.35, determine *a*) el tiempo requerido para detener el tren, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

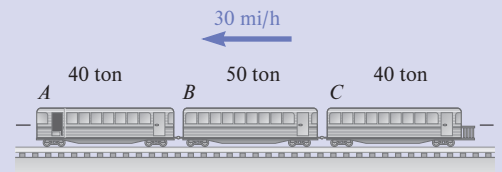


Figura P13.129 y P13.130

13.130 El tren subterráneo que se muestra en la figura viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando se aplican los frenos por completo en las ruedas del vagón *A*, lo que hace que se deslice sobre la vía. Los frenos no se aplican a las ruedas de los vagones *B* o *C*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y la vía es de 0.35, determine *a*) el tiempo necesario para detener el tren, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

13.131 Un tractor-tráiler con un tractor de 2 000 kg, un tráiler de 4 500 kg, y otro tráiler de 3 600 kg se desplaza por una carretera a 90 km/h. Los frenos del tráiler trasero fallan y el sistema antideslizante del tractor y del tráiler delantero proporcionan la mayor fuerza posible que impedirá que los neumáticos resbalen. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.75, determine *a*) el tiempo más corto para que el vehículo se detenga, *b*) la fuerza en el acoplamiento entre los dos tráileres durante ese tiempo. Suponga que la fuerza ejercida por el acoplamiento sobre los dos tráileres es horizontal.

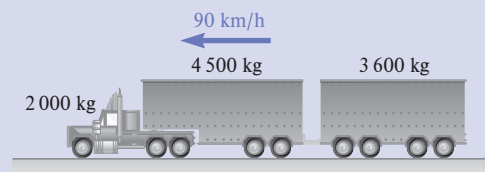


Figura P13.131

13.132 El motor aplica una fuerza descendente constante $F = 550$ lb al cable conectado al elevador *E* de 4 000 lb que se muestra en la figura. El contrapeso tiene un peso de $W = 3 000$ lb. Si se sabe que el elevador inicia su movimiento desde el reposo, determine el tiempo en que la velocidad del elevador será de 3 m/s.

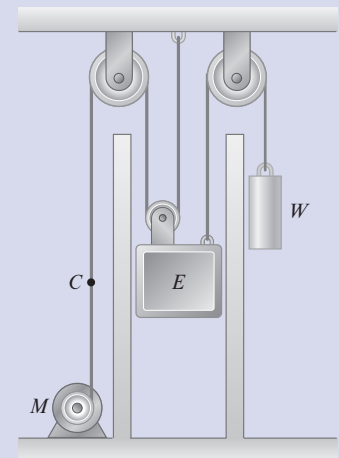


Figura P13.132

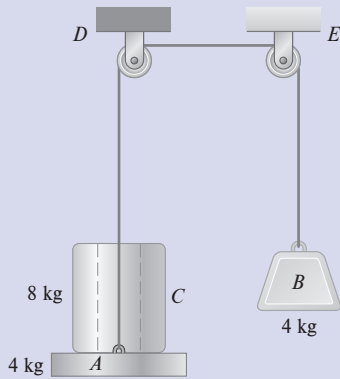


Figura P13.133

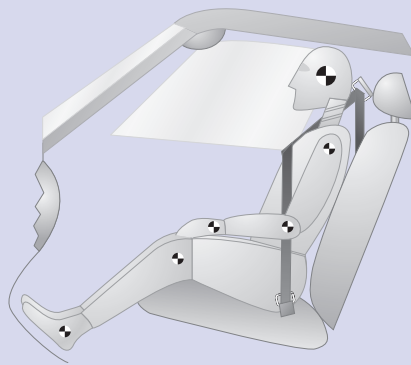


Figura P13.134

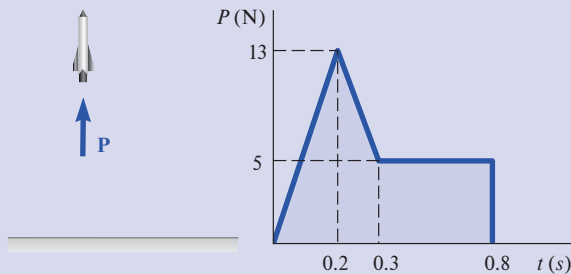
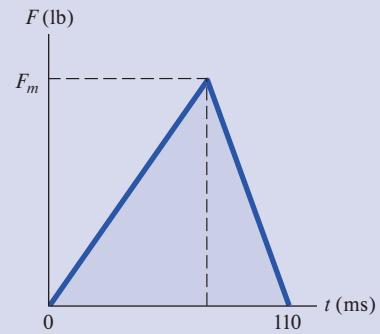


Figura P13.135

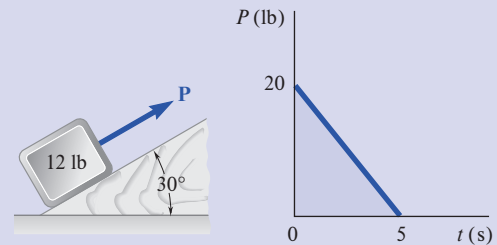


Figura P13.136

13.133 Un cilindro C de 8 kg descansa sobre una plataforma A de 4 kg sostenida por una cuerda que pasa sobre las poleas D y E y está unido a un bloque B de 4 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine a) la velocidad del bloque B después de 0.8 s, b) la fuerza ejercida por el cilindro sobre la plataforma.

13.134 Antes de diseñar un prototipo de cinturón de seguridad que se evaluará en pruebas de choque de automóviles, se realiza una estimación de la carga esperada en el cinturón de seguridad que pasa por el hombro. Si un automóvil que viaja a 45 mi/h se detiene en 110 ms, determine a) la fuerza impulsiva promedio ejercida por un hombre de 200 lb sobre el cinturón, b) la fuerza máxima F_m que se ejerce sobre el cinturón si el diagrama fuerza-tiempo tiene la forma que se muestra en la figura.

13.135 Un cohete a escala de 60 g se lanza verticalmente. El motor aplica un empuje P que varía en magnitud como se muestra. Desprecie la resistencia del aire y el cambio en la masa del cohete para determinar a) la rapidez máxima del cohete cuando asciende, b) el tiempo para que el cohete alcance su elevación máxima.

13.136 Un bloque de 12 lb, que puede deslizarse sobre una superficie inclinada sin fricción, se somete a la acción de una fuerza P que varía en magnitud de la manera mostrada. Si se sabe que el bloque está inicialmente en reposo, determine a) la velocidad del bloque en $t = 5$ s, b) el tiempo en el que la velocidad del bloque es cero.

13.137 Se realiza una prueba de choque entre un vehículo utilitario A y un automóvil compacto B de 2 500 lb. El automóvil compacto está inmóvil antes del impacto y con los frenos aplicados. Un transductor mide la fuerza durante el impacto y la fuerza P varía como se ilustra. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre los neumáticos y la carretera son de $\mu_s = 0.9$ y $\mu_k = 0.7$, determine a) el

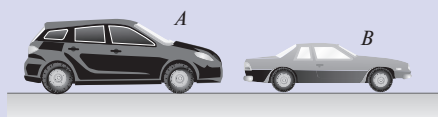
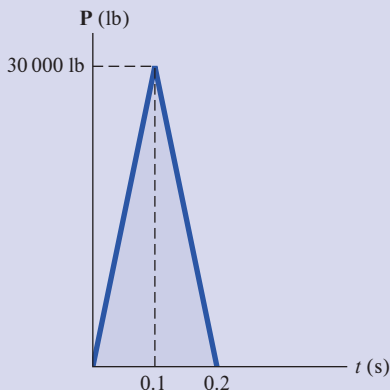


Figura P13.137 y P13.138

tiempo en el que el automóvil compacto comenzará a moverse, b) la rapidez máxima del automóvil, c) el tiempo en que el automóvil se detendrá.

- 13.138** Se realiza una prueba de choque entre un vehículo utilitario *A* de 4 500 lb y un automóvil compacto *B*. Un transductor mide la fuerza durante el impacto y la fuerza **P** varía como se ilustra. Si se sabe que el vehículo utilitario se desplaza a 30 mph al chocar al automóvil, determine la rapidez del vehículo utilitario inmediatamente después del impacto.

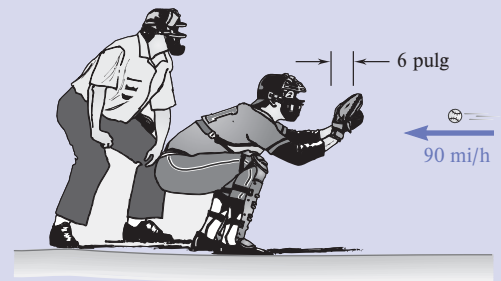


Figura P13.139

- 13.139** Un jugador de béisbol que atrapa una pelota puede suavizar el impacto moviendo su mano hacia atrás. Suponiendo que una pelota de 5 oz alcanza su guante a 90 mi/h y que el jugador hace su mano hacia atrás durante el impacto con una rapidez promedio de 30 pies/s una distancia de 6 pulg, llevando la pelota al reposo, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la mano del jugador.

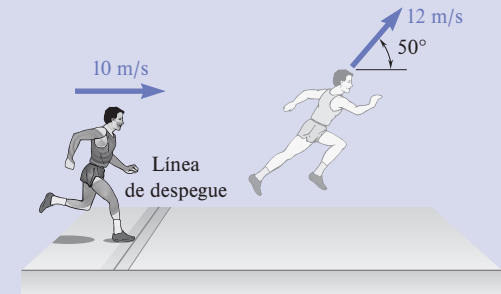


Figura P13.141

- 13.140** Una pelota de golf de 1.62 oz se golpea con un palo de golf y sale con una velocidad de 100 mi/h. Suponga que para $0 \leq t \leq t_0$, donde t_0 es la duración del impacto, la magnitud F de la fuerza ejercida sobre la pelota puede expresarse como $F = F_m \sin(\pi t/t_0)$. Si se sabe que $t_0 = 0.5$ ms, determine el valor máximo F_m de la fuerza ejercida sobre la pelota.

- 13.141** El salto triple es una prueba de pista y campo en la cual un atleta inicia una carrera y trata de llegar lo más lejos posible, con una zancada, un paso y un salto. En la figura se muestra la zancada inicial del atleta. Si se supone que este se aproxima a la línea de despegue desde la izquierda con una velocidad horizontal de 10 m/s, permanece en contacto con el suelo durante 0.18 s, y despegue a un ángulo de 50° con una velocidad de 12 m/s, determine la componente vertical de la fuerza impulsiva promedio ejercida por el suelo sobre su pie. Dé su respuesta en términos del peso W del atleta.

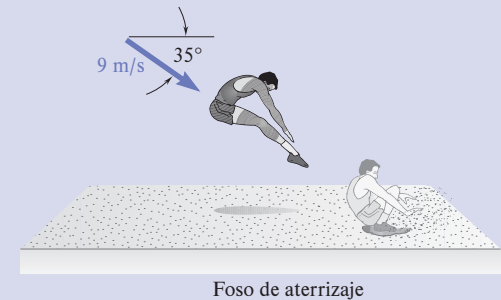


Figura P13.142

- 13.142** La última parte de la competencia atlética de salto triple es el salto, en el cual el atleta realiza el último de sus tres avances, aterrizando en un foso de arena. Si se supone que la velocidad de un atleta de 80 kg justo antes de aterrizar es de 9 m/s a un ángulo de 35° con la horizontal y que el atleta se detiene por completo 0.22 s después del aterrizaje, determine la componente horizontal de la fuerza impulsiva promedio que se ejerce sobre sus pies durante el aterrizaje.

- 13.143** El diseño de un nuevo implante de cadera sin cemento, se estudiará utilizando un implante instrumentado y un fémur simulado fijo. Si se supone que el cincel aplica una fuerza promedio de 2 kN por un tiempo de 2 ms sobre el implante de 200 g, determine a) la velocidad del implante inmediatamente después del impacto, b) la resistencia promedio del implante a la penetración si este se mueve 1 mm antes de quedar en reposo.

- 13.144** Un proyectil de 28 g se dispara con una velocidad de 650 m/s hacia una placa de acero y rebota en una trayectoria *CD* con una velocidad de 500 m/s. Si se sabe que el proyectil deja un rasguño de 50 mm sobre la placa y suponiendo que su rapidez promedio es de 600 m/s mientras

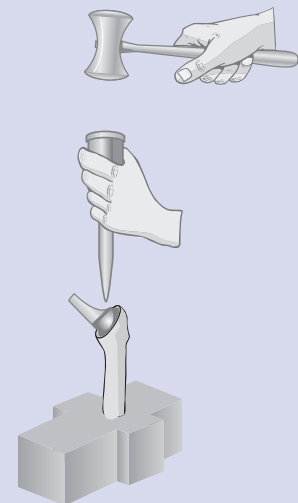


Figura P13.143

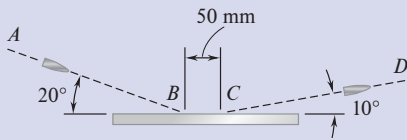


Figura P13.144

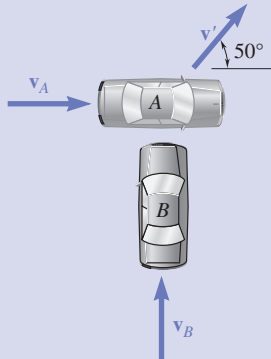


Figura P13.146

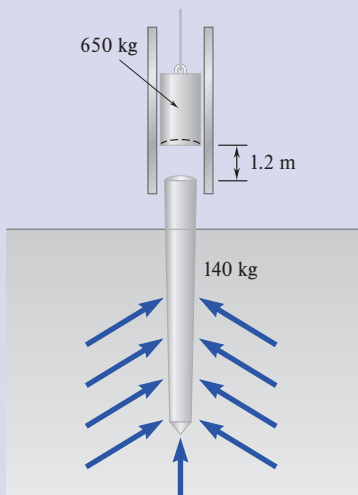


Figura P13.147

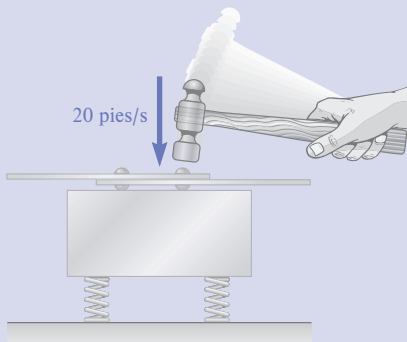


Figura P13.148

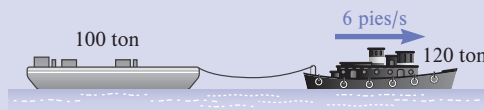


Figura P13.145

está en contacto con esta misma, determine la magnitud y dirección de la fuerza impulsiva promedio ejercida por la placa sobre el proyectil.

- 13.145** Un remolcador de 120 toneladas se mueve a 6 pies/s con un cable de remolque flojo conectado a una barcaza de 100 toneladas que está en reposo. El cable se desenrolla de un tambor en el remolcador a razón constante de 5.4 pies/s y esa velocidad se mantiene después de que el cable se tensa. Sin tener en cuenta la resistencia del agua, determine *a*) la velocidad del remolcador después de que el cable se tensa, *b*) el impulso ejercido sobre la barcaza cuando el cable se tensa.
- 13.146** El automóvil *A* viajaba hacia el este con una rapidez de 15 m/s y el automóvil *B* viajaba hacia el norte con una rapidez desconocida cuando chocaron en una intersección. Tras la investigación, se descubrió que, después del choque, los dos automóviles quedaron pegados y derraparon en un ángulo de 50° al noreste. Si se sabe que las masas de *A* y *B* son 1 200 kg y 1 500 kg, respectivamente, determine *a*) la rapidez de *B* antes del impacto, *b*) la distancia que recorrerán los automóviles antes de detenerse si el coeficiente de fricción cinética entre los automóviles que se deslizan y la carretera es de 0.8.
- 13.147** El martillo de 650 kg de un encajador de pilotes cae desde una altura de 1.2 m sobre la parte superior de un pilote de 140 kg encajándolo 110 mm en el suelo. Suponga un impacto perfectamente plástico ($e = 0$) y determine la resistencia promedio del suelo a la penetración.
- 13.148** Un pequeño remache que conecta dos piezas de hoja metálica se está remachando mediante martilleo. Determine el impulso ejercido sobre el remache y la energía que absorbe en cada martillazo sabiendo que la cabeza del martillo tiene un peso de 1.5 lb y que golpea al remache con una velocidad de 20 pies/s. Suponga que el martillo no rebota y que el yunque está soportado por resortes y *a*) tiene una masa infinita (soporte rígido), *b*) tiene un peso de 9 lb.
- 13.149** La bala *B* pesa 0.5 oz y los bloques *A* y *C* pesan 3 lb cada uno. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.25$. En un inicio la bala se mueve con una velocidad v_0 y los bloques *A* y *C* se encuentran en reposo (figura 1). Después de que la bala pasa a través de *A* se incrusta en el bloque *C* y los tres objetos se detienen en las posiciones mostradas (figura 2). Determine la rapidez inicial v_0 de la bala.

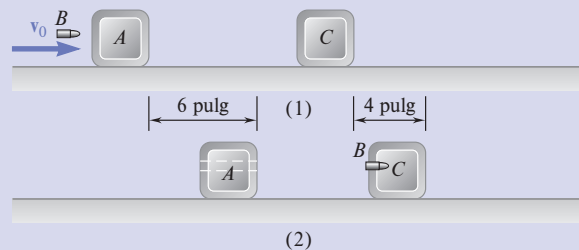


Figura P13.149

- 13.150** Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie en extremos opuestos en un bote de 300 lb, listos para lanzarse al agua, cada uno con una velocidad de 16 pies/s relativa al bote. Determine la velocidad del bote después de que ambos se hayan lanzado, si *a*) la mujer se lanza primero, *b*) el hombre se lanza primero.

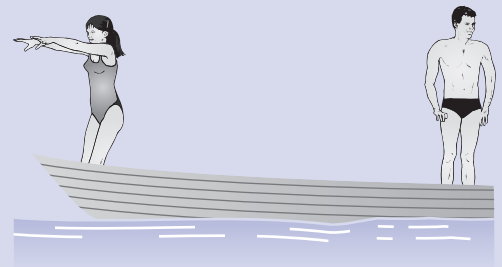


Figura P13.150

- 13.151** Una pelota de 75 g se lanza desde una altura de 1.6 m con una velocidad horizontal de 2 m/s y rebota en una placa lisa de 400 g soportada por resortes. Si se sabe que la altura del rebote es de 0.6 m, determine *a*) la velocidad de la placa inmediatamente después del impacto, *b*) la energía perdida debido al impacto.

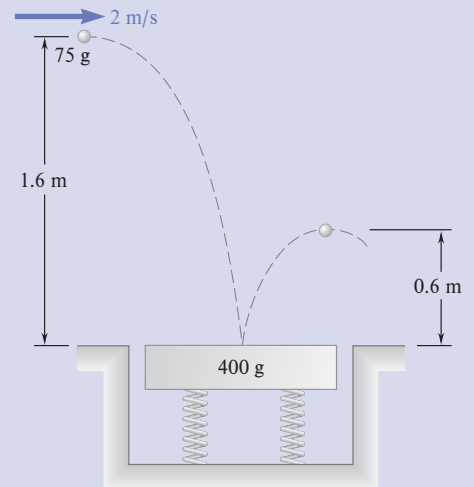


Figura P13.151

- 13.152** Un péndulo balístico se utiliza para medir la rapidez de proyectiles de alta velocidad. Un proyectil *A* de 6 g se dispara hacia un bloque de madera de 1 kg *B* suspendido por una cuerda de una longitud $l = 2.2$ m. El bloque oscila un ángulo máximo de $\theta = 60^\circ$. Determine *a*) la rapidez inicial del proyectil v_0 , *b*) el impulso impartido por el proyectil sobre el bloque, *c*) la fuerza sobre la cuerda inmediatamente después del impacto.

- 13.153** Un viejo cañón de 3 000 lb dispara un proyectil de 18 lb con una velocidad inicial de 1 500 pies/s a un ángulo de 30° (se puede suponer que esta es la velocidad absoluta del proyectil). El cañón descansa sobre una superficie horizontal y se puede mover libremente de manera horizontal. Si se supone que el barril del cañón está rigidamente unido al bastidor (no hay mecanismo de retroceso) y que el proyectil abandona el cañón 5 ms después del disparo, determine *a*) la velocidad de retroceso del cañón, *b*) la resultante de las fuerzas impulsivas verticales ejercidas por el suelo sobre el cañón.

- 13.154** Con el fin de probar la resistencia al impacto de una cadena, es suspendida de una viga rígida de 240 lb y sostenida mediante dos columnas. Una varilla unida al último eslabón es golpeada con un bloque de 60 lb que se deja caer desde una altura de 5 pies. Determine el impulso inicial ejercido sobre la cadena y la energía que absorbe, suponiendo que el bloque no rebota en la varilla y que las columnas que soportan la viga son *a*) perfectamente rígidas, *b*) equivalentes a dos resortes perfectamente elásticos.

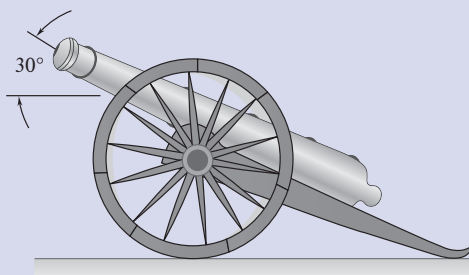


Figura P13.153

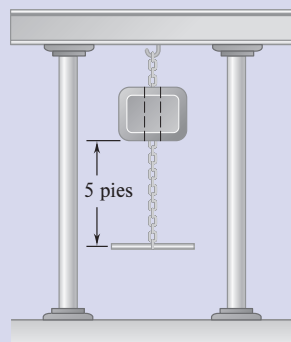


Figura P13.154

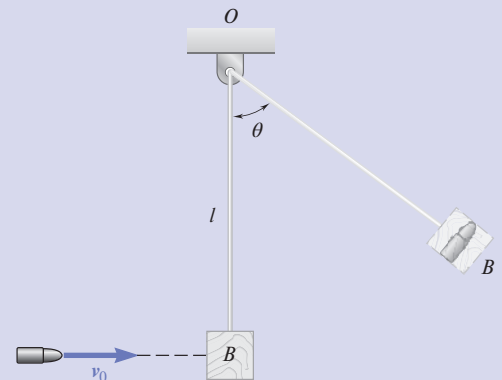


Figura P13.152

13.4 IMPACTOS

Un choque entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy pequeño y durante el cual los dos cuerpos ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí recibe el nombre de **impacto**. La normal común a las superficies en contacto durante el impacto se conoce como **línea de impacto**. Si los centros de masa en los dos cuerpos que chocan se ubican sobre esta línea, el impacto es un **impacto central**. En otro caso, se dice que el impacto es **excéntrico**. Este estudio se limitará al impacto central de dos partículas. El análisis del impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se considerará después, en el capítulo 17.

Si las velocidades de dos partículas se dirigen a lo largo de la línea de impacto, se dice que el **impacto** será **directo** (figura 13.20a). Si alguna o ambas partículas se mueven a lo largo de una línea que no sea la línea de impacto, se dice que el **impacto** será **oblicuo** (figura 13.20b).

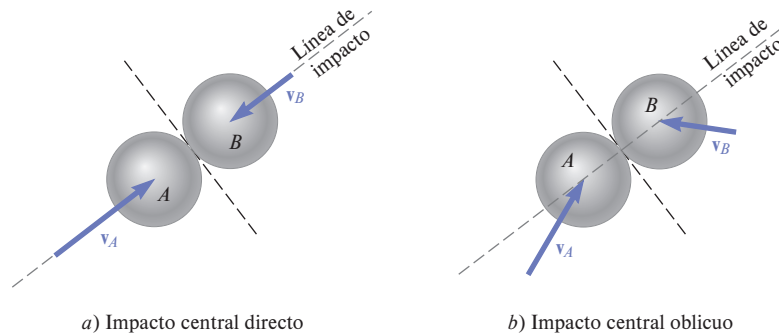


Figura 13.20 Los impactos centrales pueden ser a) directos (o “de frente”) o b) oblicuos.

13.4A Impacto central directo

Considere dos partículas A y B , de masas m_A y m_B , las cuales se mueven en la misma línea recta y hacia la derecha con velocidades conocidas v_A y v_B (figura 13.21a). Si v_A es mayor que v_B , la partícula A golpeará finalmente a la partícula B . Por el impacto, las dos partículas se **deformarán** y, al final del periodo de deformación, tendrán la misma velocidad u (figura 13.21b). Se presentará un periodo de **restitución**, al final del cual, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales implicados, las dos partículas habrán recobrado su forma original o permanecerán deformadas. El propósito aquí es determinar las velocidades v'_A y v'_B de las partículas al final del periodo de restitución (figura 13.21c).

Considerando primero las dos partículas como un solo sistema, se advierte que no hay fuerza impulsiva externa. De tal modo, se conserva la cantidad de movimiento total de las dos partículas y se escribe

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.34')$$

Puesto que todas las velocidades consideradas están dirigidas a lo largo del mismo eje, es posible sustituir la ecuación que se obtuvo por la siguiente relación que incluye solo componentes escalares

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

Un valor positivo para cualesquiera de las cantidades escalares v_A , v_B , v'_A o v'_B significa que el vector correspondiente está dirigido hacia la derecha; un valor negativo indica que el vector correspondiente está dirigido hacia la izquierda.

Para obtener las velocidades v'_A y v'_B , es necesario establecer una segunda relación entre los escalares v'_A y v'_B . Para este propósito, se considera ahora el movimiento de la partícula A durante el periodo de deformación y se aplica el principio del impulso

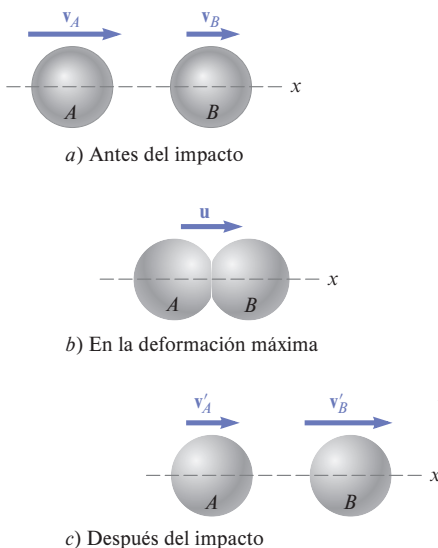


Figura 13.21 Todo impacto consta de tres etapas: a) antes del impacto, b) una deformación máxima cuando las partículas tienen la misma velocidad y c) después del impacto.

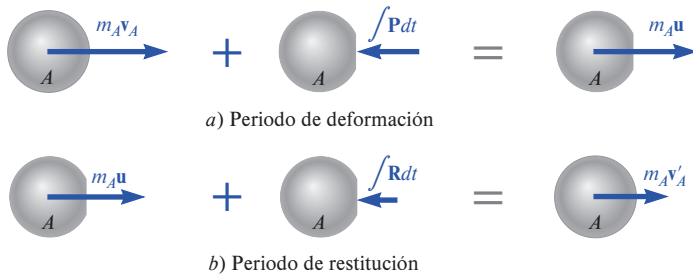


Figura 13.22 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento de la partícula A durante a) el periodo de deformación y b) durante el periodo de restitución.

y la cantidad de movimiento. Puesto que la única fuerza impulsiva que actúa sobre A durante este periodo es la fuerza **P** ejercida por B (figura 13.22a), se escribe, utilizando de nuevo componentes escalares,

$$m_A v_A - \int P dt = m_A u \quad (13.38)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación. Al considerar ahora el movimiento de A durante el periodo de restitución, y denotar con **R** la fuerza ejercida por B sobre A durante este periodo (figura 13.22b), se escribe

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A \quad (13.39)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

En general, la fuerza **R** ejercida sobre A durante el periodo de restitución difiere de la fuerza **P** ejercida durante el periodo de deformación, y la magnitud $\int R dt$ de su impulso es menor que la magnitud $\int P dt$ del impulso de **P**. El cociente de las magnitudes de los impulsos correspondientes, respectivamente, al periodo de restitución y al periodo de deformación se denomina **coeficiente de restitución** y se denota con *e*. Se escribe

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (13.40)$$

El valor del coeficiente *e* siempre está entre 0 y 1. Depende en gran medida de los materiales implicados, pero también varía de manera considerable con la velocidad de impacto y la forma y tamaño de los dos cuerpos que chocan.

Al resolver las ecuaciones (13.38) y (13.39) para los dos impulsos y sustituir en la ecuación (13.40), se escribe

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \quad (13.41)$$

Un análisis similar de la partícula B conduce a la relación

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \quad (13.42)$$

Puesto que los cocientes en las ecuaciones (13.41) y (13.42) son iguales, también lo son al cociente obtenido al sumar, respectivamente, sus numeradores y sus denominadores. Se tiene, por tanto

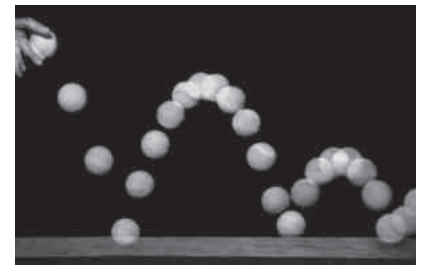
$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

y

Coeficiente de restitución

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

En virtud de que $v'_B - v'_A$ representa la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto y $v_A - v_B$ representa su velocidad relativa antes del impacto, la ecuación (13.43) expresa que



Fotografía 13.5 La altura de los rebotes de esta pelota de tenis disminuye después de cada impacto, debido a que tiene un coeficiente de restitución menor que uno y en cada rebote se pierde energía. ©Terry Oakley/Alamy Stock Photo

La velocidad relativa de dos partículas después del impacto puede obtenerse al multiplicar su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución.

Esta propiedad se utiliza para determinar experimentalmente el valor del coeficiente de restitución de dos materiales dados.

Las velocidades de las dos partículas después del impacto pueden obtenerse ahora al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.43) para v'_A y v'_B . Hay que recordar que la deducción de las ecuaciones (13.37) y (13.43) se basa en la suposición de que la partícula B se localiza a la derecha de A , y que ambas partículas se están moviendo al principio hacia la derecha. Si la partícula B se mueve inicialmente hacia la izquierda, el escalar v_B debe considerarse negativo. La misma convención de signo se cumple para las velocidades después del impacto: un signo positivo para v'_A indicará que la partícula A se mueve hacia la derecha después del impacto, y un signo negativo señalará que se mueve hacia la izquierda.

Dos casos de impacto particulares son de especial interés:

1. $e = 0$, **impacto perfectamente plástico**. Cuando $e = 0$, la ecuación (13.43) produce $v'_B = v'_A$. No hay periodo de restitución y ambas partículas permanecen juntas después del impacto. Al sustituir $v'_B = v'_A = v'$ en la ecuación (13.37), la cual expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva, se escribe

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v' \quad (13.44)$$

Esta ecuación puede resolverse para la velocidad común v' de las dos partículas después del impacto.

2. $e = 1$, **impacto perfectamente elástico**. Cuando $e = 1$ la ecuación (13.43) se reduce a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \quad (13.45)$$

que expresa que las velocidades relativas antes y después del impacto son iguales. Esto significa que los impulsos recibidos por cada partícula durante el periodo de deformación y durante el periodo de restitución son los mismos. Las velocidades v'_A y v'_B pueden obtenerse al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.45).

Vale la pena notar que **en el caso de un impacto perfectamente elástico, se conserva la energía total de las dos partículas**, así como su cantidad de movimiento total. Las ecuaciones (13.37) y (13.45) pueden escribirse como sigue:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \quad (13.37')$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \quad (13.45')$$

Al multiplicar las ecuaciones (13.37') y (13.45') miembro por miembro, se tiene

$$\begin{aligned} m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) &= m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B) \\ m_A v_A^2 - m_A (v'_A)^2 &= m_B (v'_B)^2 - m_B v_B^2 \end{aligned}$$

Al reagrupar los términos en la ecuación que se obtuvo y multiplicar por $\frac{1}{2}$, se escribe

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 \quad (13.46)$$

lo cual expresa que la energía cinética de las partículas se conserva. Sin embargo, hay que observar que **en el caso general de un impacto**, esto es, cuando e no es igual a 1, **no se conserva la energía total de las partículas**. Lo anterior puede demostrarse para cualquier caso dado al comparar las energías cinéticas antes y después del impacto. La energía cinética perdida en parte se transforma en otras formas de energía, como calor, sonido o generación de ondas elásticas dentro de los dos cuerpos que chocan.

13.4B Impacto central oblicuo

En seguida se estudiará el caso en el que las velocidades de las dos partículas que chocan *no* están dirigidas a lo largo de la línea de impacto (figura 13.23). Como se indica anteriormente, se afirma que el impacto será **oblicuo**. Puesto que no se conocen ni la dirección ni la magnitud de las velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ de las partículas después del impacto, su determinación requerirá el uso de cuatro ecuaciones independientes.

Se eligieron como ejes coordenados al eje n a lo largo de la línea de impacto, (esto es, a lo largo de la normal común a las superficies en contacto), y el eje t a lo largo de su tangente común. En casos muy especiales podemos suponer que las partículas son perfectamente lisas y sin fricción, se observa que los únicos impulsos que se ejercen sobre las partículas durante el impacto se deben a las fuerzas internas dirigidas a la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n (figura 13.24). Se concluye que

1. La componente de la cantidad de movimiento de cada partícula a lo largo del eje t , considerada por separado, se conserva; porque no actúan impulsos en la dirección t , en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada partícula permanece invariable. Se escribe

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \quad (v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.47)$$

2. La componente a lo largo del eje n de la cantidad de movimiento total de las dos partículas se conserva porque los dos impulsos son iguales y opuestos entre sí. Se escribe

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \quad (13.48)$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto se obtiene multiplicando la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. De hecho, una deducción similar a la que se dio en la sección 13.4A para el impacto central directo produce

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

De esta manera se han obtenido cuatro ecuaciones independientes que pueden resolverse para las componentes de las velocidades de A y B después del impacto. Este método de solución se ilustra en el problema modelo 13.20.

El análisis del impacto central oblicuo de dos partículas se ha basado hasta ahora en la suposición de que ambas partículas se mueven libremente antes y después del impacto. A continuación se examinará el caso en el que una o ambas de las partículas que chocan tienen restricciones en su movimiento. Considere, por ejemplo, el choque entre el bloque A , que está restringido a moverse sobre una superficie horizontal y la bola B , que tiene libertad para moverse en el plano de la figura (figura 13.25). Si se supone que no hay fricción entre el bloque y la bola, o entre el bloque y la superficie horizontal, note que los impulsos ejercidos sobre el sistema consisten en los impulsos de las fuerzas internas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ dirigidos a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n , y del impulso de la fuerza externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ ejercido

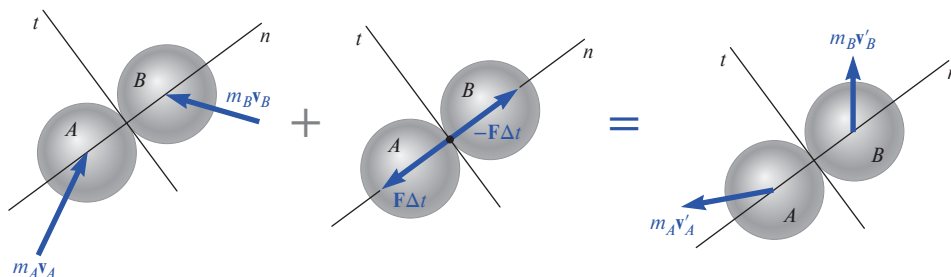


Figura 13.24 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para un impacto oblicuo, donde se supone que los impulsos en la dirección tangencial son cero. Al incluir los impulsos internos como iguales y opuestos, también se obtiene el diagrama de impulso-cantidad de movimiento para cada objeto individual (simplemente ignore el otro objeto).

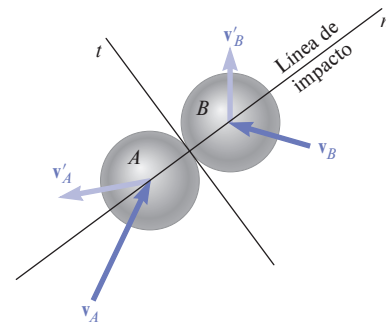


Figura 13.23 En un impacto central oblicuo, las velocidades de las partículas que chocan no están dirigidas sobre la línea de impacto.



Fotografía 13.6 Cuando una bola de billar golpea a otra, existe una transferencia de cantidad de movimiento. ©TongRo Images/Alamy

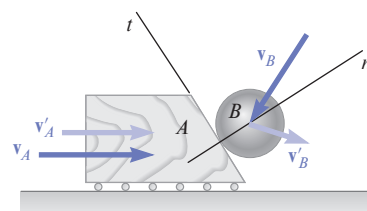


Figura 13.25 Un impacto entre un bloque que se desliza por una superficie horizontal y una bola que se mueve en un plano vertical se denomina "impacto restringido".

por la superficie horizontal sobre el bloque A y dirigido a lo largo de la vertical (figura 13.26).

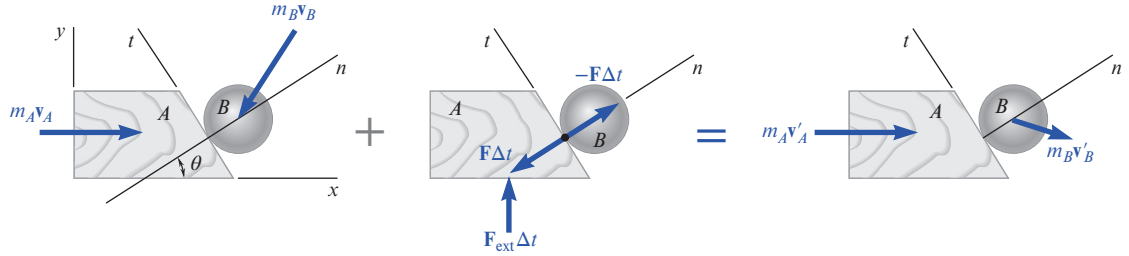


Figura 13.26 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para un impacto restringido entre el bloque A y la bola B .

Las velocidades del bloque A y de la bola B inmediatamente después del impacto se representan mediante tres incógnitas: la magnitud de la velocidad v'_A del bloque A , la cual se sabe que es horizontal, y la magnitud y dirección de la velocidad v'_B de la bola B . Por tanto, se deben escribir tres ecuaciones. Esto se hace utilizando un diagrama de impulso-cantidad de movimiento y observando el siguiente comportamiento.

1. La componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento de la bola B se conserva porque no actúa ningún impulso sobre la bola en la dirección t , por tanto, la componente t de la velocidad de la bola B permanece invariable. Se escribe

$$(v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.50)$$

2. La componente a lo largo del eje x horizontal de la cantidad de movimiento total del bloque A y de la bola B se conserva porque no actúa ningún impulso sobre la bola en la dirección x . Se escribe

$$m_A v_A + m_B (v_B)_x = m_A v'_A + m_B (v'_B)_x \quad (13.51)$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa del bloque A y de la bola B después del impacto se obtiene al multiplicar la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. Se escribe de nuevo

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

Sin embargo, se debe advertir que en el caso considerado aquí la validez de la ecuación (13.49) no puede establecerse a través de una mera extensión de la deducción que se dio en la sección 13.4A para el impacto central directo de dos partículas que se mueven en una línea recta. De hecho, estas partículas no estaban sujetas a ningún impulso externo, en tanto que el bloque A en el análisis presente está sujeto al impulso ejercido por la superficie horizontal. Para demostrar que la ecuación (13.49) sigue siendo válida, se aplica primero el principio del impulso y la cantidad de movimiento al bloque A sobre el periodo de deformación (figura 13.27). Al considerar solo las componentes horizontales, se escribe

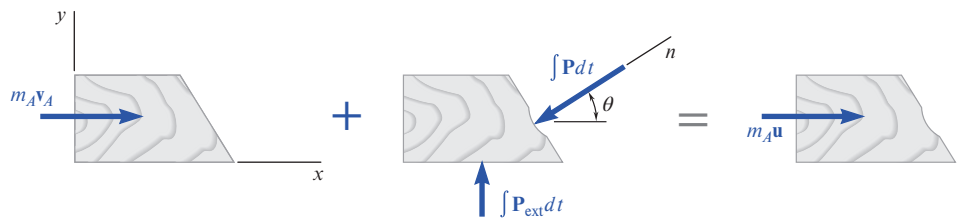


Figura 13.27 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el bloque A durante el periodo de deformación.

$$m_A v_A - \left(\int P dt \right) \cos \theta = m_A u \quad (13.52)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación y donde u representa la velocidad del bloque A al final de ese periodo. Al considerar ahora el periodo de restitución, se escribe de manera similar

$$m_A u - \left(\int R dt \right) \cos \theta = m_A v'_A \quad (13.53)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

Al recordar de la sección 13.4A la definición del coeficiente de restitución, se escribe

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (13.40)$$

Al resolver las ecuaciones (13.52) y (13.53) para las integrales $\int P dt$ y $\int R dt$, y sustituir en la ecuación (13.40), se tiene, después de simplificaciones,

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

Luego, al multiplicar todas las velocidades por $\cos \theta$ para obtener sus proyecciones sobre la línea de impacto,

$$e = \frac{u_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - u_n} \quad (13.54)$$

Note que la ecuación (13.54) es idéntica a la ecuación (13.41), excepto por los subíndices n que se usan aquí para indicar que se están considerando componentes de velocidad a lo largo de la línea de impacto. Puesto que el movimiento de la bola B no está restringido, la demostración de la ecuación (13.49) puede completarse de la misma manera que la deducción de la ecuación (13.43). Así, se concluye que la relación en la ecuación (13.49) entre las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades relativas de las dos partículas que chocan permanece válida cuando se restringe el movimiento de una de las partículas. La validez de esta relación se extiende sin dificultad al caso en el que ambas partículas se restringen en su movimiento.

13.4C Problemas en los que intervienen diversos principios

Ahora, ya se tienen tres métodos diferentes para la solución de problemas de cinética.

- La aplicación directa de la segunda ley de Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- El método del trabajo y la energía, $T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$, donde $U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}}$ es el trabajo de fuerzas externas no conservativas como la fricción.
- El método del impulso y la cantidad de movimiento, $m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2$.

Para obtener el mayor beneficio de estos tres métodos, se debe ser capaz de elegir el método más adecuado para la solución de un problema determinado. También se debe estar preparado para resolver problemas que requieren el uso de diversos principios.

Ya se vio que el método del trabajo y la energía en muchos casos es más expedito que la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Sin embargo, como se indicó en la sección 13.1C, el método del trabajo y la energía tiene limitaciones y, en ocasiones, debe complementarse con el uso de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Este es el caso, por ejemplo, cuando se desea determinar una aceleración o una fuerza normal.

Para la solución de problemas en los que intervienen fuerzas no impulsivas, suele encontrarse que la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ produce una solución igual de rápida que el método del impulso y cantidad de movimiento y que el método del trabajo y la

energía (si se aplica), es más rápido y conveniente. Sin embargo, en problemas de impacto, el método del impulso y la cantidad de movimiento es el único que resulta práctico. Una solución basada en la aplicación directa de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sería tediosa, y el

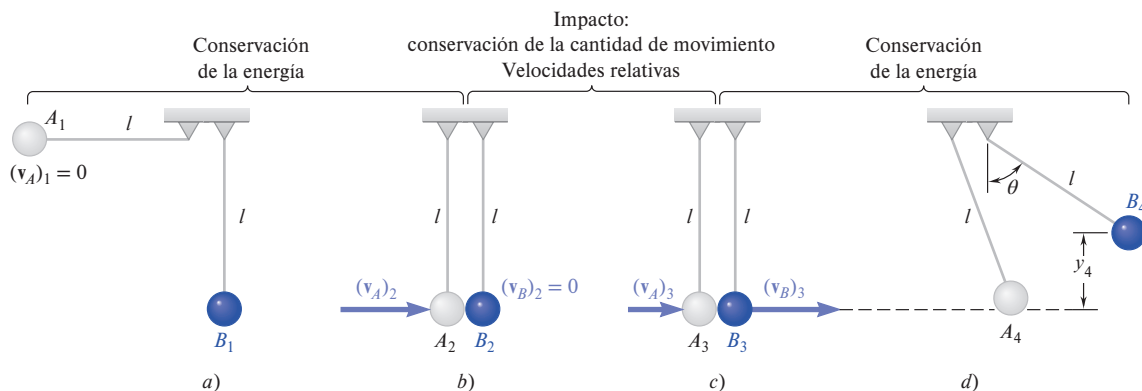


Figura 13.28 Análisis de un impacto entre dos péndulos de plomada mediante la conservación de la energía y la conservación de cantidad de movimiento.

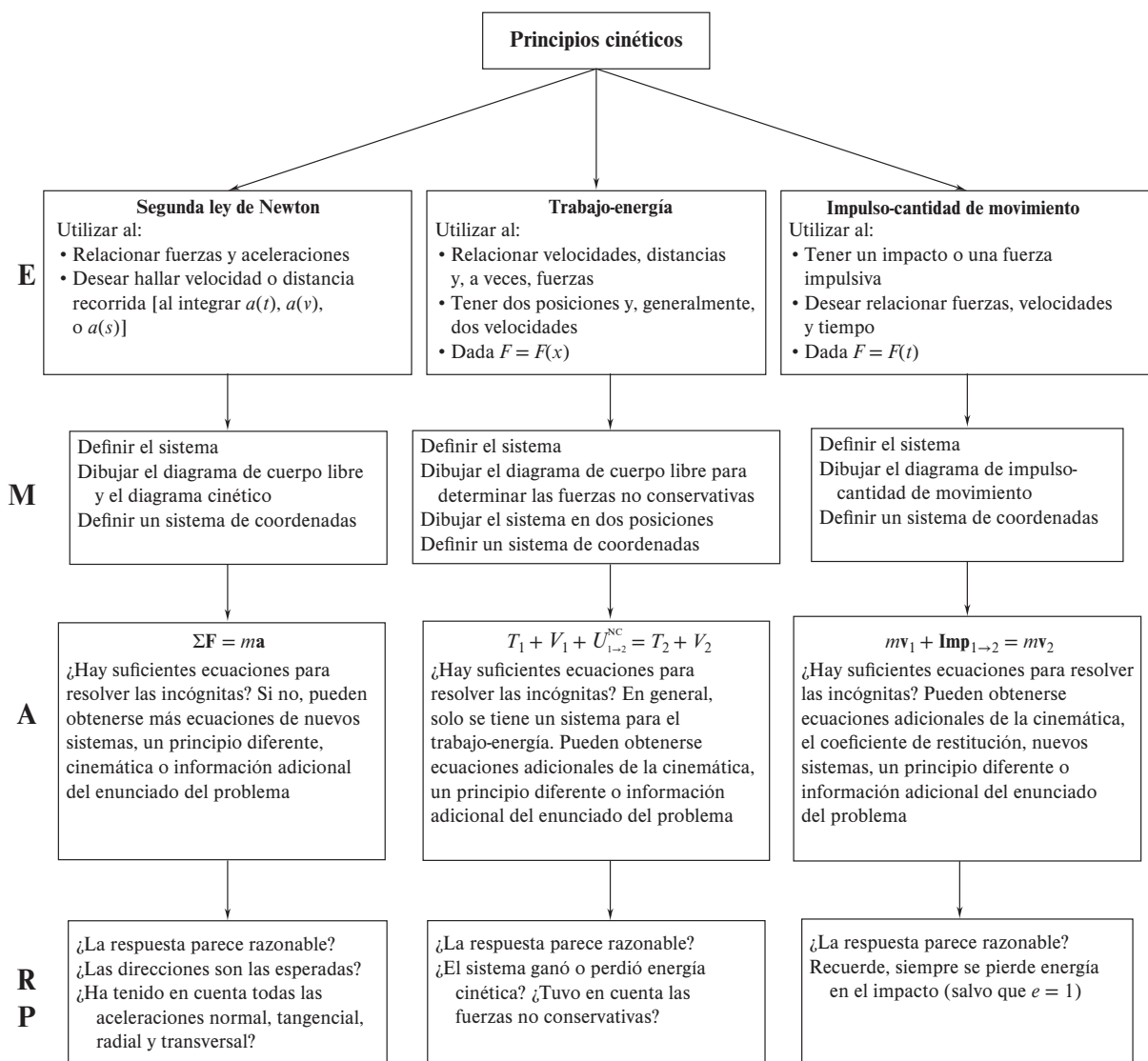


Figura 13.29 Los tres principios de la cinética que utilizan la metodología EMARP.

método del trabajo y la energía no puede utilizarse, puesto que el impacto (a menos que sea perfectamente elástico) implica una pérdida de energía mecánica.

Muchos problemas implican solo fuerzas conservativas, salvo para una fase de impacto corta durante la cual actúan fuerzas impulsivas. La solución de problemas de este tipo se divide en varias partes. La parte correspondiente a la fase de impacto requiere el uso del método del impulso y la cantidad de movimiento y de la relación entre las velocidades relativas, en tanto que las otras partes suelen resolverse por el método del trabajo y la energía. Sin embargo, si el problema implica la determinación de una fuerza normal, es necesario el uso de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Considere, por ejemplo, un péndulo A , de masa m_A y longitud l , que se suelta sin velocidad desde una posición A_1 (figura 13.28a). El péndulo oscila con libertad en un plano vertical y golpea a un segundo péndulo B , de masa m_B e igual longitud l , que está inicialmente en reposo. Luego del impacto (con coeficiente de restitución e), el péndulo B oscila en ángulo θ que se desea determinar.

La solución del problema puede dividirse en tres partes:

1. **El péndulo A oscila de A_1 a A_2 .** Es posible utilizar el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$ del péndulo en A_2 (figura 13.28b).
2. **El péndulo A golpea al péndulo B .** Utilizando el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos péndulos y la relación entre sus velocidades relativas, se determinan las velocidades $(\mathbf{v}_A)_3$ y $(\mathbf{v}_B)_3$ de los dos péndulos después del impacto (figura 13.28c).
3. **El péndulo B oscila de B_3 a B_4 .** Aplicando el principio de la conservación de la energía al péndulo B , se determina la elevación máxima y_4 que alcanza este mismo (figura 13.28d). El ángulo θ puede determinarse entonces por trigonometría.

Advierta que si se van a determinar las tensiones en las cuerdas que sostienen a los péndulos, el método de solución que acaba de describirse debe complementarse con el uso de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En la figura 13.29 se muestra un resumen de los principios cinéticos que se han tratado hasta ahora y algunos consejos sobre cuándo aplicarlos.

Problema modelo 13.18

Un vagón de ferrocarril de 20 Mg que se mueve a una rapidez de 0.5 m/s hacia la derecha choca con un vagón de 35 Mg que se encuentra en reposo. Si después del choque se observa que el vagón de 35 Mg se mueve hacia la derecha a una rapidez de 0.3 m/s, determine el coeficiente de restitución entre los dos vagones.

ESTRATEGIA: Dado que se trata de un impacto sin impulsos externos, utilizar la conservación de la cantidad de movimiento lineal. También deberá utilizarse la ecuación para el coeficiente de restitución.

MODELAR: Seleccionar como sistema los vagones y modelarlos como partículas. La figura 1 ilustra el diagrama de impulso-cantidad de movimiento. No existen impulsos externos actuando en este sistema.

ANALIZAR: Se expresa la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos vagones,

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B$$

Al sustituir los valores de las incógnitas se obtiene

(continúa)

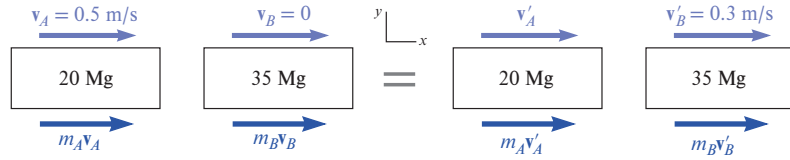


Figura 1 Velocidades y cantidades de movimiento de los vagones antes y después del impacto.

$$(20 \text{ Mg})(+0.5 \text{ m/s}) + (35 \text{ Mg})(0) = (20 \text{ Mg})v'_A + (35 \text{ Mg})(+0.3 \text{ m/s})$$

$$v'_A = -0.025 \text{ m/s} \quad v'_A = 0.025 \text{ m/s} \leftarrow$$

El coeficiente de restitución se obtiene al escribir

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{+0.3 - (0.025)}{+0.5 - 0} = \frac{0.325}{0.5}$$

$$e = 0.65 \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Los vagones están restringidos a moverse sobre las vías, por lo que se trata de un impacto directo central de una dimensión. La interacción de fuerzas es grande, pero dura solo un periodo breve. La energía mecánica se pierde durante el impacto, por lo que no se podría haber utilizado la conservación de energía.

Problema modelo 13.19

Se lanza una pelota contra una pared vertical sin fricción. Inmediatamente antes de que la pelota golpee la pared, su velocidad tiene una magnitud v y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si se sabe que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de la pelota en términos de v cuando esta rebota en la pared.

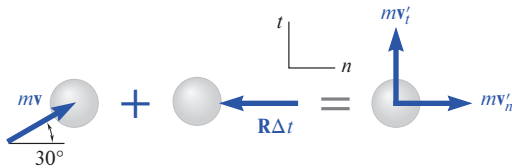


Figura 1 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento de la pelota.

ESTRATEGIA: Un impacto ocurre y se cuenta con el coeficiente de restitución, entonces debe utilizarse la conservación de la cantidad de movimiento y la definición del coeficiente de restitución.

MODELAR: Seleccionar la pelota como sistema y modelarla como una partícula. La figura 1 ilustra el diagrama de impulso-cantidad de movimiento.

ANALIZAR: Descomponer la velocidad inicial de la pelota en las componentes perpendicular y paralela a la pared como se ilustra en la figura 2.

$$v_n = v \cos 30^\circ = 0.866v \quad v_t = v \sin 30^\circ = 0.500v$$

Movimiento paralelo hacia la pared. Puesto que no hay fricción en la pared, el impulso que ejerce sobre la pelota es perpendicular a aquella. De tal modo, la componente paralela hacia la pared de la cantidad de movimiento de la pelota se conserva y se tiene

$$v'_t = v_t = 0.500v \uparrow$$

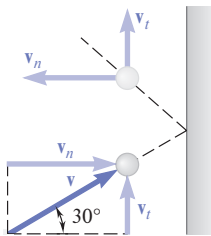


Figura 2 Componentes de la velocidad inicial.

(continúa)

Movimiento perpendicular hacia la pared. Puesto que la masa de la pared (y la Tierra) es esencialmente infinita, expresar que la cantidad de movimiento total de la pelota y la pared se conserva, no produciría información útil. Al utilizar la ecuación de restitución, se escribe

$$0 - v'_n = e(v_n - 0) \\ v'_n = -0.90(0.866v) = -0.779v \quad v'_n = 0.779v \leftarrow$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes v'_n y v'_t (figura 3)

$$v' = 0.926v \searrow 32.7^\circ \quad \blacktriangleleft$$

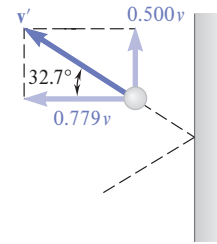


Figura 3 Magnitud y dirección de la velocidad final.

REVISAR y PENSAR: Se realizan pruebas similares para garantizar que el equipamiento deportivo, como pelotas de tenis, de golf y de básquetbol, sea consistente y esté dentro de determinadas especificaciones. Las pruebas de las pelotas y palos de golf modernos demuestran que el coeficiente de restitución en realidad disminuye al aumentar la velocidad del palo (de aproximadamente 0.84 a una rapidez de 90 mph a aproximadamente 0.80 a rapidez de 130 mph).

Problema modelo 13.20

La magnitud y dirección de las velocidades de dos pelotas idénticas sin fricción antes de que choquen entre sí son como se indica en la figura. Suponiendo que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada pelota después del impacto.

ESTRATEGIA: Dado que el impacto ocurre, utilizar el principio de impulso y cantidad de movimiento. También se necesita la ecuación para el coeficiente de restitución.

MODELAR: Seleccionar ambas pelotas como sistema. Suponiendo que son pequeñas y no giran, pueden modelarse como partículas. La figura 1 ilustra las direcciones normal y tangencial; la figura 2 ilustra el diagrama de impulso-cantidad de movimiento para este sistema. Las fuerzas impulsivas que las pelotas ejercen entre sí durante el impacto están dirigidas a lo largo de la línea que une los centros de las pelotas y que recibe el nombre de línea de impacto. Al descomponer las velocidades en las componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la línea de impacto y a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto, se escribe

$$\begin{aligned} (v_A)_n &= v_A \cos 30^\circ = +26.0 \text{ pies/s} \\ (v_A)_t &= v_A \sin 30^\circ = +15.0 \text{ pies/s} \\ (v_B)_n &= -v_B \cos 60^\circ = -20.0 \text{ pies/s} \\ (v_B)_t &= v_B \sin 60^\circ = +34.6 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

ANALIZAR:

Movimiento a lo largo de la tangente común. Al considerar solo las componentes t , se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada

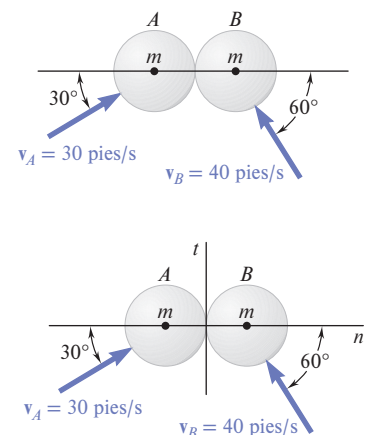


Figura 1 Velocidades iniciales de A y B y el sistema de coordenadas que se usará.

(continúa)

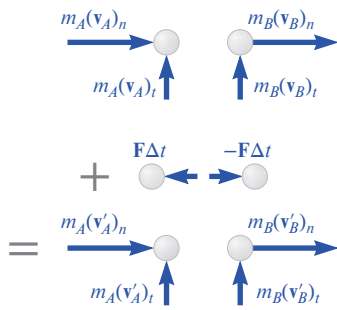


Figura 2 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para el sistema.

pelota *por separado*. Puesto que las fuerzas impulsivas están dirigidas a lo largo de la línea de impacto, la componente t de la cantidad de movimiento y, en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada pelota, no se alteran. Así,

$$(\mathbf{v}'_A)_t = 15.0 \text{ pies/s } \uparrow \quad (\mathbf{v}'_B)_t = 34.6 \text{ pies/s } \uparrow$$

Movimiento a lo largo de la línea de impacto. En la dirección n , se considera a las dos pelotas como un solo sistema y se nota que por la tercera ley de Newton, los impulsos internos son, respectivamente, $F\Delta t$ y $-F\Delta t$ y se cancelan. De tal modo, se escribe que la cantidad de movimiento total de las pelotas se conserva

$$\begin{aligned} m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n &= m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \\ m(26.0) + m(-20.0) &= m(v'_A)_n + m(v'_B)_n \\ (v_A)_n + (v'_B)_n &= 6.0 \quad (1) \end{aligned}$$

Si se utiliza la ecuación para el coeficiente de restitución que relaciona las velocidades relativas, se escribe

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$

Ahora se pueden sustituir las cantidades conocidas de la ecuación. Es importante utilizar correctamente los signos al sustituir en esta ecuación, por ejemplo, $(v_B)_n = -20$. Se obtiene

$$\begin{aligned} (v'_B)_n - (v'_A)_n &= (0.90)[26.0 - (-20.0)] \\ (v'_B)_n - (v'_A)_n &= 41.4 \quad (2) \end{aligned}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2) de manera simultánea, se obtiene

$$\begin{aligned} (v'_A)_n &= -17.7 & (v'_B)_n &= +23.7 \\ (v'_A)_n &= 17.7 \text{ pies/s } \leftarrow & (v'_B)_n &= 23.7 \text{ pies/s } \rightarrow \end{aligned}$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes de la velocidad de cada pelota (figura 3), se obtiene

$$\mathbf{v}'_A = 23.2 \text{ pies/s } \nearrow 40.3^\circ \quad \mathbf{v}'_B = 41.9 \text{ pies/s } \nearrow 55.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

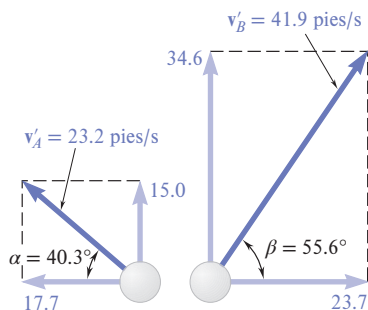
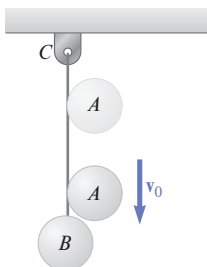


Figura 3 Las componentes de velocidad pueden descomponerse en sus magnitudes y direcciones.

REVISAR y PENSAR: En lugar de seleccionar ambas pelotas como sistema, podría haberse utilizado impulso-cantidad de movimiento a lo largo de la línea de impacto para cada pelota en forma individual. Esto podría haber generado dos ecuaciones y una incógnita adicional, $F\Delta t$. Para determinar la fuerza impulsiva F , se habría necesitado el tiempo del impacto, Δt .



Problema modelo 13.21

La pelota B cuelga de una cuerda inextensible BC. Una pelota idéntica A se suelta desde el reposo cuando apenas toca la cuerda y adquiere una velocidad v_0 antes de chocar con la pelota B. Suponiendo un impacto perfectamente elástico ($e = 1$) y ninguna fricción, determine la velocidad de cada pelota inmediatamente después del impacto.

(continúa)

ESTRATEGIA: Dado que ocurre un impacto, utilizar el principio de impulso-cantidad de movimiento. También se necesita la ecuación para el coeficiente de restitución.

MODELAR: Se cuenta con varias opciones de sistemas para este problema. Si se selecciona *A* como sistema, se obtiene el diagrama de impulso-cantidad de movimiento de la figura 1. Si se seleccionan ambas pelotas como sistema, se genera el diagrama de impulso-cantidad de movimiento de la figura 2.

ANALIZAR:

Principio del impulso-cantidad de movimiento: pelota A. Utilice trigonometría para determinar el ángulo de impacto (figura 1a). Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento de la pelota *A* a lo largo de la tangente común a las pelotas *A* y *B* (figura 1b) se obtiene

$$\begin{aligned}
 m\mathbf{v}_A + \mathbf{F}\Delta t &= m\mathbf{v}'_A \\
 + \searrow \text{componentes } t: \quad m v_0 \sin 30^\circ + 0 &= m(v'_A)_t \\
 (v'_A)_t &= 0.5v_0
 \end{aligned}$$

Principio del impulso-cantidad de movimiento: pelotas A y B. Dado que la bola *B* está restringida para moverse en un círculo con el centro *C*, su velocidad $\mathbf{v}_B$ después del impacto debe ser horizontal. Al aplicar la conservación de la cantidad de movimiento para un sistema que incluye ambas pelotas (figura 2) se obtiene

$$\begin{aligned}
 m\mathbf{v}_A + \mathbf{T} \Delta t &= m\mathbf{v}'_A + m\mathbf{v}'_B \\
 \pm \text{componentes } x: \quad 0 &= m(v'_A)_t \cos 30^\circ - m(v'_A)_n \sin 30^\circ - m v'_B
 \end{aligned}$$

Observe que la ecuación obtenida expresa la conservación de la cantidad de movimiento total en la dirección *x*. Al sustituir $(v'_A)_t$ de la ecuación (1) y reagrupar términos, se escribe

$$0.5(v'_A)_n + v'_B = 0.433v_0 \quad (2)$$

Velocidades relativas a lo largo de la línea de impacto. Puesto que $e = 1$, la ecuación para el coeficiente de restitución se obtiene

$$\begin{aligned}
 (v'_B)_n - (v'_A)_n &= (v_A)_n - (v_B)_n \\
 v'_B \sin 30^\circ - (v'_A)_n &= v_0 \cos 30^\circ - 0 \\
 0.5v'_B - (v'_A)_n &= 0.866v_0
 \end{aligned} \quad (3)$$

Es importante notar que el coeficiente de restitución siempre utiliza las componentes de las velocidades sobre la línea de impacto; es decir, en la dirección *n*. Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2) y (3), se obtiene

$$\begin{aligned}
 (v'_A)_n &= -0.520v_0 & v'_B &= 0.693v_0 \\
 v'_B &= 0.693v_0 \leftarrow
 \end{aligned}$$

Al recordar la ecuación (1) se realiza el dibujo adjunto (figura 3) y se obtiene por trigonometría

$$\begin{aligned}
 v'_A &= 0.721v_0 & \beta &= 46.1^\circ & \alpha &= 46.1^\circ - 30^\circ = 16.1^\circ \\
 v'_A &= 0.721v_0 \nearrow 16.1^\circ
 \end{aligned}$$

REVISAR y PENSAR: Dado que $e = 1$, el impacto de *A* y *B* es perfectamente elástico. Por tanto, en lugar de utilizar el coeficiente de restitución, se pudo haber utilizado la conservación de la energía como ecuación final.

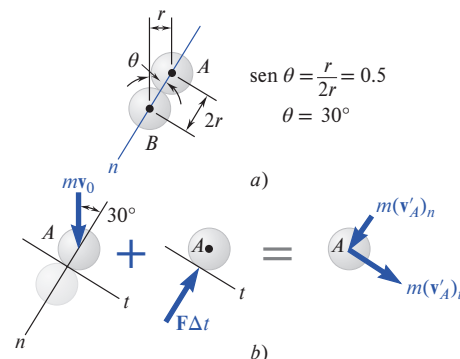


Figura 1 a) Geometría de las pelotas que impactan, b) impulso-cantidad de movimiento para la pelota A.

(1)

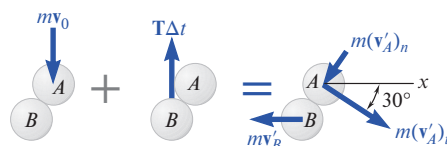


Figura 2 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para ambas pelotas.

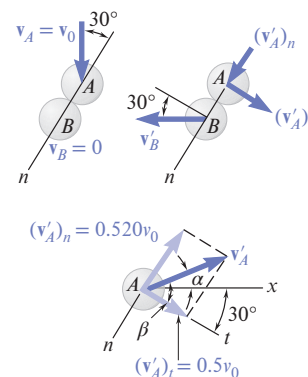
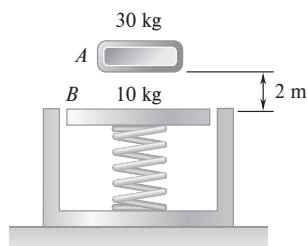


Figura 3 Diagrama para hallar la magnitud y dirección para la velocidad final de *B*.



Problema modelo 13.22

Un bloque de 30 kg se deja caer desde una altura de 2 m sobre el plato de 10 kg de una balanza de resorte. Suponiendo que el impacto es perfectamente plástico, determine el desplazamiento máximo del plato. La constante de resorte es $k = 20 \text{ kN/m}$.

ESTRATEGIA: Este problema tiene tres fases diferentes, como se ilustra en la figura 1. En la fase 1, A cae (utilizar la conservación de la energía); en la fase 2, A choca contra B (utilizar la conservación de la energía), y en la fase 3, A y B bajan juntas (utilizar la conservación de la energía).

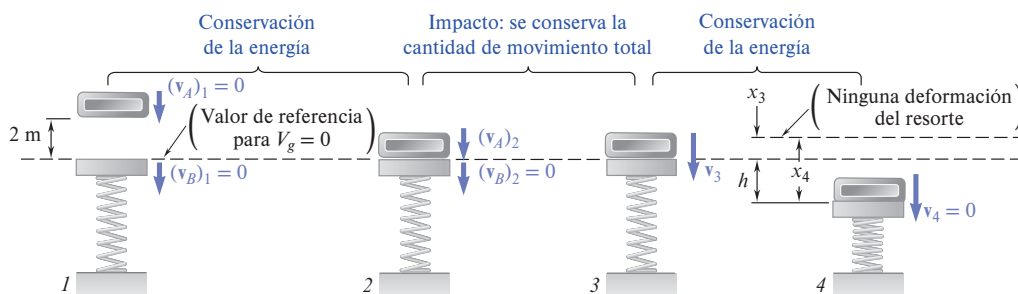


Figura 1 Las tres fases del movimiento.

MODELAR: Definir un sistema diferente, para cada fase del movimiento. Para la fase 1 seleccionar A como sistema y para la fase 2 definir como sistema a A y B juntas. Para la fase 3, el sistema es A , B y el resorte.

ANALIZAR:

Conservación de la energía en A . Bloque A pesa:

$$W_A = (30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 294 \text{ N}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 = 0 & V_1 &= W_A y = (294 \text{ N})(2 \text{ m}) = 588 \text{ J} \\ T_2 &= \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 = \frac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 & V_2 &= 0 \\ T_1 + V_1 &= T_2 + V_2: & 0 + 588 \text{ J} &= \frac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 + 0 \\ & & (v_A)_2 &= +6.26 \text{ m/s} & (v_A)_2 &= 6.26 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned}$$

Impacto: conservación de la cantidad de movimiento para A y B . Puesto que el impacto es perfectamente plástico, $e = 0$; el bloque y el plato se mueven juntos después del impacto.

$$\begin{aligned} m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 &= (m_A + m_B)v_3 \\ (30 \text{ kg})(6.26 \text{ m/s}) + 0 &= (30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})v_3 \\ v_3 &= +4.70 \text{ m/s} & v_3 &= 4.70 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned}$$

Conservación de la energía para A , B y el resorte. Inicialmente el resorte sostiene al peso W_B del plato; en consecuencia, la deformación inicial del resorte es

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = \frac{98.1 \text{ N}}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(continúa)

Al denotar por x_4 la deformación máxima total del resorte, se escribe

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \frac{1}{2}(30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})(4.70 \text{ m/s})^2 = 442 \text{ J}$$

$$V_3 = V_g + V_e = 0 + \frac{1}{2}kx_3^2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^3)(4.91 \times 10^{-3})^2 = 0.241 \text{ J}$$

$$T_4 = 0$$

$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \frac{1}{2}kx_4^2 = -(392)h + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Al advertir que el desplazamiento del plato es $h = x_4 - x_3$ se escribe

$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4:$$

$$442 + 0.241 = 0 - 392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Si se resuelve la ecuación cuadrática, resulta

$$x_4 = 0.230 \text{ m} \quad h = x_4 - x_3 = 0.230 \text{ m} - 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

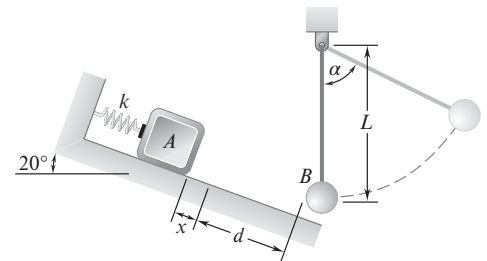
$$h = 0.225 \text{ m}$$

$$h = 225 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: La constante del resorte para esta balanza es bastante grande, pero el bloque es muy grande y se deja caer desde una altura de 2 m. Desde esta perspectiva, la deflexión parece razonable.

Problema modelo 13.23

Un bloque de 2 kg A se empuja contra un resorte y lo comprime una distancia $x = 0.1 \text{ m}$. El bloque se libera desde el reposo y se desliza por la inclinación de 20° hasta golpear una esfera B de 1 kg, que está suspendida por una cuerda inextensible de 1 m. La constante del resorte es $k = 800 \text{ N/m}$, el coeficiente de fricción entre A y el piso es 0.2, el bloque A se desliza desde la longitud sin estirar del resorte, una distancia $d = 1.5 \text{ m}$, y el coeficiente de restitución entre A y B es 0.8. Cuando $\alpha = 40^\circ$, determine a) la rapidez de B , b) la tensión de la cuerda.



ESTRATEGIA: Este problema tiene muchos aspectos, por lo que se debe dividir el movimiento en pasos:

- Paso 1:** El bloque A se desliza por la pendiente, por lo que hay dos posiciones. Por tanto, se utiliza el principio de trabajo-energía entre la posición 1 y la posición 2 para hallar la velocidad de A justo antes de golpear la pelota B (figura 1).
- Paso 2:** El bloque A golpea B , por lo que ocurre un impacto. Por tanto, se utiliza el impulso-cantidad de movimiento y la ecuación para el coeficiente de restricción.
- Paso 3:** La pelota B está oscilando, por lo que se cuenta con dos posiciones (posición 2 y posición 3 en la figura 1) y se solicita que halle la rapidez en la posición 3. Por tanto, se utiliza la conservación de la energía.
- Paso 4:** Para hallar la tensión cuando $\alpha = 40^\circ$, utilizar la segunda ley de Newton con coordenadas normales y tangenciales.

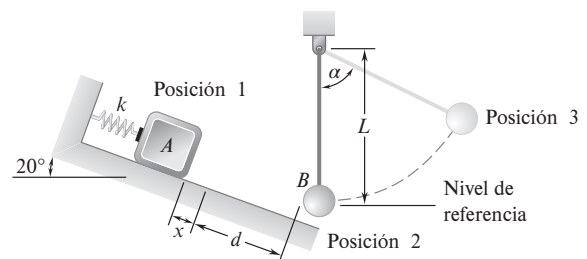


Figura 1 Tres posiciones de interés para este problema.

(continúa)

MODELAR: Cada paso requiere un sistema diferente. Para el paso 1, el sistema es A y el resorte, para el paso 2 es A y B , y por último, para los pasos 3 y 4, es B . Se modelan A y B como partículas y se dibujan las figuras adecuadas en la sección Analizar.

ANALIZAR:

Paso 1. El bloque se desliza por la inclinación. El principio del trabajo y la energía entre el lugar donde se libera el bloque hasta el punto en que choca con B es

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (1)$$

Trabajo. La única fuerza que no realiza trabajo alguno es la fuerza de fricción. La figura 2 ilustra un diagrama de cuerpo libre para A . Al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

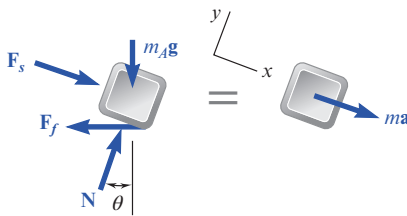


Figura 2 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético del bloque A .

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0: \quad N - m_A g \cos \theta = 0 \quad \text{o}$$

$$N = m_A g \cos \theta = (2 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \cos 20^\circ = 18.437 \text{ N}$$

y la fuerza de la fricción es

$$F_f = \mu_k N = (0.2)(18.437 \text{ N}) = 3.687 \text{ N}$$

Por tanto, el trabajo es

$$U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = -F_f(x + d) = -(3.687 \text{ N})(1.6 \text{ m}) = -5.900 \text{ J}$$

Posición 1. Se ubica el plano de referencia para V_g en el punto de impacto cerca de B (véase la figura 1). Se calcula la energía inicial,

$$T_1 = 0 \quad V_{e_1} = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} (800) (0.1)^2 = 4.00 \text{ J}$$

$$V_{g_1} = m_A g h_1 = m_A g (x + d) \sin \theta = (2)(9.81)(1.6) \sin 20^\circ = 10.737 \text{ J}$$

Posición 2. La energía en la posición 2 es

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} (2) v_A^2 = 1.000 v_A^2 \quad V_2 = 0$$

Al sustituir en la ecuación (1) da $0 + 10.737 \text{ J} + 4.00 \text{ J} - 5.900 \text{ J} = 1.00 v_A^2 + 0$. Al resolver para v_A da $v_A = 2.973 \text{ m/s}$.

Paso 2. Impacto. La figura 3 ilustra diagramas de impulso-cantidad de movimiento para A y B .

Obsérvese que se definen dos sistemas de coordenadas: n define la línea de impacto entre el bloque y la pelota y y está en la dirección de la fuerza impulsiva de

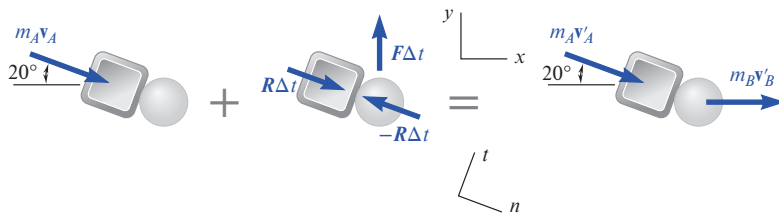


Figura 3 Diagrama de impulso-cantidad de movimiento para A y B .

(continúa)

la cuerda. Dado que no actúa ninguna fuerza impulsiva en la dirección horizontal, se aplica el impulso-cantidad de movimiento en la dirección x ,

$$\rightarrow \text{componentes } x: \quad m_A v_A \cos \theta + 0 = m_A v'_A \cos \theta + m_B v'_B \quad (2)$$

Coeficiente de restitución

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad \text{o} \quad v_B \cos \theta - v'_A = e v_A \quad (3)$$

En las ecuaciones (2) y (3) hay dos incógnitas, v'_A y v'_B , que se pueden hallar, lo que genera

$$v'_A = 1.0382 \text{ m/s}$$

$$v'_B = 3.6356 \text{ m/s}$$

Paso 3. La esfera B se eleva. La tensión no realiza ningún trabajo, por lo que debe usarse la conservación de la energía para B entre las posiciones 2 y 3. Nuevamente, se define el plano de referencia que se ilustra en la figura 1.

$$T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} = T_3 + V_{g_3} + V_{e_3} \quad (4)$$

Posición 2.

$$T_2 = \frac{1}{2} m_B (v'_B)^2 \quad V_{g_2} = 0, V_{e_2} = 0$$

Posición 3.

$$T_3 = \frac{1}{2} m_B (v_B)_3 \quad V_{g_3} = m_B g L (1 - \cos \alpha) \quad V_{e_3} = 0$$

Al sustituirlas en la ecuación (4) y al resolver para $(v_B)_3$ se obtiene

$$(v_B)_3 = 2.94 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

Paso 4. Tensión de la cuerda. La figura 4 ilustra un diagrama de cuerpo libre y un diagrama cinético para la esfera en la posición 3. Al aplicar la segunda ley de Newton en la dirección normal, se obtiene

$$+\nearrow \Sigma F_n = m_B a_n: \quad T - m_B g \cos \alpha = m_B a_n = m_B \frac{(v_B)_3^2}{L}$$

Al resolver para T , se obtiene

$$T = 16.14 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

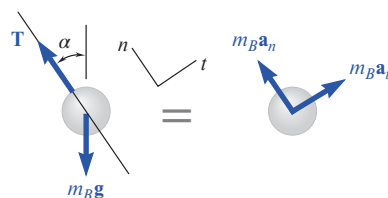


Figura 4 Diagrama de cuerpo libre y diagrama cinético de la esfera B .

REVISAR y PENSAR: No es posible utilizar el trabajo-energía desde la posición 1 a la posición 3 porque se da una pérdida de energía cuando A golpea a B . Si el coeficiente de fricción hubiera sido mayor, por ejemplo $\mu_k = 0.4$, se habría hallado que después del impacto B tiene una rapidez de 2.10 m/s . Al insertarlo en la ecuación (4) se obtiene un número imaginario para la rapidez $\alpha = 40^\circ$, lo que quiere decir que la esfera B no alcanza este ángulo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudia el **impacto de dos cuerpos lisos**, esto es, se supone que no hay impulsos tangenciales perpendiculares a la línea de impacto. Este supuesto solo es válido en algunos casos específicos y no debe aplicarse en impactos como los accidentes de tráfico. Se resolverá un gran número de problemas de impacto al expresar que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos y al advertir la relación que existe entre las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del impacto.

1. Como primer paso en la solución, debe elegir y dibujar los siguientes ejes de coordenadas: el eje t , el cual es tangente a las superficies de contacto de los dos cuerpos que chocan, y el eje n , que es normal a las superficies de contacto y define la línea de impacto. En todos los problemas de esta sección la línea de impacto pasa por los centros de masa de los cuerpos que chocan, y el impacto se refiere a un **impacto central**.

2. El siguiente paso es dibujar un diagrama de impulso-cantidad de movimiento en el que se muestran las cantidades de movimiento de los cuerpos antes del impacto, los impulsos ejercidos sobre los cuerpos durante el impacto y las cantidades de movimiento finales de los cuerpos luego del impacto (figura 13.24). Después se observará si el impacto es un **impacto central directo** o un **impacto central oblicuo**.

3. Impacto central directo, (problema modelo 13.18). Ocurre cuando las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto están dirigidas a lo largo de la línea de impacto (figura 13.20a).

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que las fuerzas impulsivas son internas al sistema, es posible escribir que la cantidad de movimiento total de A y B se conserva,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

donde v_A y v_B denotan las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto y v'_A y v'_B denotan sus velocidades después del impacto.

b) Coeficiente de restitución. También es posible escribir la siguiente relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

donde e es el coeficiente de restitución entre los dos cuerpos.

Hay que observar que las ecuaciones (13.37) y (13.43) son ecuaciones escalares que pueden usarse para resolver dos incógnitas. Además, es necesario tener cuidado y adoptar una convención de signos consistente para todas las velocidades.

4. Impacto central oblicuo, (problema modelo 13.20). Ocurre cuando una o ambas de las velocidades iniciales de los cuerpos no está dirigida a lo largo de la línea de impacto (figura 13.20b). Nuevamente, estos pasos de solución se aplican únicamente a problemas donde las fuerzas impulsivas en dirección tangencial pueden ignorarse (por ejemplo, no se deben utilizar para resolver el problema 13.146). Para resolver problemas de este tipo, dibuje el diagrama de impulso-cantidad de movimiento y defina los ejes n y t . Luego, puede descomponer los momentos y cantidades de movimiento en sus componentes n y t .

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Si los cuerpos no están restringidos, tendrá conservación de la cantidad de movimiento del sistema en las direcciones n y t (problema modelo 13.20). Además, que las fuerzas impulsivas actúan a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n , se conserva la componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento *de cada cuerpo*. Por tanto, es posible escribir para cada cuerpo que las componentes t de su velocidad antes y después del impacto son iguales,

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \quad (v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.47)$$

Además, la componente a lo largo del eje n de la cantidad de movimiento total del sistema se conserva,

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \quad (13.48)$$

b) Coeficiente de restitución. La relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos antes y después del impacto puede escribirse solo en la dirección n , por tanto,

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

Ahora, se cuenta con cuatro ecuaciones que es posible resolver para cuatro incógnitas. Observe que después de encontrar todas las velocidades, es factible determinar el impulso ejercido por el cuerpo A sobre el cuerpo B dibujando un diagrama de impulso-cantidad de movimiento solo para B e igualando las componentes en la dirección n .

c) Cuando está restringido el movimiento de uno de los cuerpos que choca, es necesario incluir los impulsos de las fuerzas externas en el diagrama dibujado (problemas modelo 13.21 y 13.23). En esas condiciones se observará que algunas de las relaciones anteriores no se cumplen. Sin embargo, en el ejemplo que se muestra en la figura 13.26 la cantidad de movimiento total del sistema se conserva en una dirección perpendicular al impulso externo. Es necesario advertir que cuando el cuerpo A rebota en una superficie fija B la única ecuación de conservación de la cantidad de movimiento que puede utilizarse es la primera de las ecuaciones (13.47) (problema modelo 13.19).

5. Hay que recordar que se pierde energía durante la mayoría de los impactos. La única excepción corresponde a los impactos **perfectamente elásticos** ($e = 1$), donde se conserva la energía. De tal modo, en el caso general de impacto, donde $e < 1$, la energía no se conserva. Por tanto, es necesario tener cuidado y *no aplicar* el principio de conservación de la energía en una situación de impacto. En vez de eso, aplique este principio por separado a los movimientos precedentes y siguientes al impacto (problemas modelo 13.22 y 13.23).

Problemas

PREGUNTA CONCEPTUAL

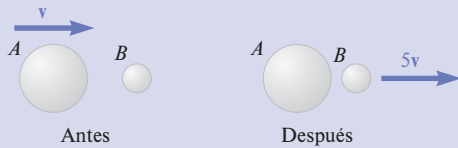


Figura P13.PC6

13.PC6 Una bola A de 5 kg choca contra una bola B de 1 kg que estaba inicialmente en reposo. ¿Es posible que después del impacto A no se mueva y B tenga una rapidez de $5v$?

- a) Sí.
- b) No.

Explique su respuesta.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA DE DIAGRAMA DE IMPULSO-MOMENTO

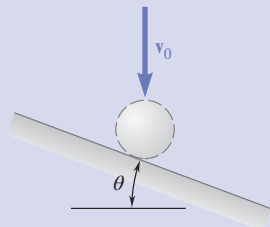


Figura P13.F6

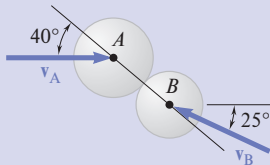


Figura P13.F8

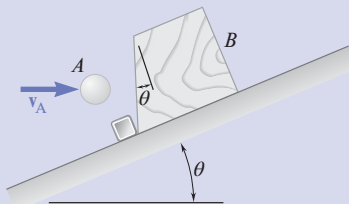


Figura P13.F9

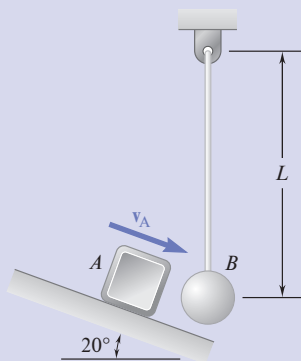


Figura P13.F10

13.F6 Una esfera con una rapidez v_0 rebota después de golpear un plano inclinado sin fricción como se muestra. Dibuje el diagrama de impulso-momento que puede usarse para determinar la velocidad de la esfera después del impacto.

13.F7 Una locomotora A de 80 Mg que se desliza libremente a 6.5 km/h golpea una plataforma C de 20 Mg que transporta una carga B de 30 Mg que se desliza a lo largo del piso de la plataforma ($\mu_k = 0.25$). La plataforma estaba en reposo cuando sus frenos se soltaron. En vez de que A y C se acoplaran como se esperaba, se observó que A rebotó con una rapidez de 2 km/h después del impacto. Dibuje los diagramas de impulso-momento que pueden usarse para determinar a) el coeficiente de restitución y la rapidez de la plataforma inmediatamente después del impacto, b) el tiempo de deslizamiento de la carga hasta detenerse con respecto a la plataforma.

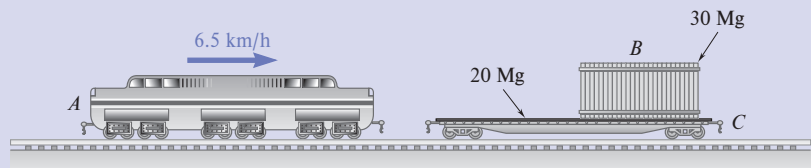


Figura P13.F7

13.F8 Dos bolas sin fricción chocan entre sí como se indica. El coeficiente de restitución entre las bolas es e . Dibuje el diagrama de impulso-momento que podría usarse para determinar las velocidades de A y B después del impacto.

13.F9 Una bola A de 10 kg que se mueve horizontalmente a 12 m/s choca contra un bloque B de 10 kg. El coeficiente de restitución del impacto es 0.4 y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie inclinada es 0.5. Dibuje el diagrama de impulso-momento que determina la rapidez de A y de B después del impacto.

13.F10 El bloque A de masa m_A golpea la bola B de masa m_B con una rapidez v_A como se indica. Dibuje el diagrama de impulso-momento que puede usarse para determinar la rapidez de A y B después del impacto y el impulso durante el impacto.

PROBLEMAS DE FIN DE SECCIÓN

- 13.155** Dos bloques de acero se deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal; inmediatamente antes del impacto, sus velocidades son las que se muestran en la figura. Si se sabe que $e = 0.75$, determine *a*) sus velocidades después del impacto, *b*) la pérdida de energía durante el impacto.

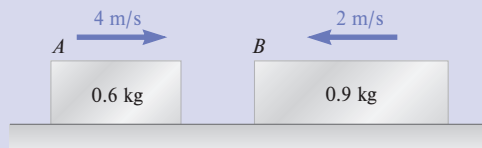


Figura P13.155 y P13.156

- 13.156** Las velocidades de dos bloques de acero antes del impacto son las mostradas en la figura. Si se sabe que la velocidad del bloque *B* después del impacto es de 2.5 m/s hacia la derecha, determine el coeficiente de restitución entre los dos bloques.

- 13.157** Uno de los requerimientos para que se utilicen pelotas de tenis en una competencia oficial es que, cuando se dejen caer sobre una superficie rígida desde una altura de 100 pulg, la altura del primer rebote de la pelota debe estar en el intervalo $53 \text{ pulg} \leq h \leq 58 \text{ pulg}$. Determine el intervalo del coeficiente de restitución de las pelotas de tenis que cumpla con este requisito.

- 13.158** Un collarín *A* de masa *m* se mueve con rapidez *v* cuando golpea un collarín *B* idéntico que está en reposo. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los collarines es *e*, determine la energía perdida en el impacto en función de *m*, *e* y *v*.

- 13.159** Para aplicar una carga de choque a un obús de artillería, se suelta un péndulo *A* de 20 kg desde una altura conocida, que golpea al impactador *B* a una velocidad conocida v_0 . El impactador *B* choca después contra el obús de artillería *C* de 1 kg. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre todos los objetos es *e*, determine la masa de *B* para maximizar el impulso aplicado al obús de artillería *C*.

- 13.160** Los paquetes de un depósito de provisión de repuestos para automóviles se transportan al muelle de carga empujándolos sobre un transportador de rodillos con muy poca fricción. En el instante que se ilustra, los paquetes *B* y *C* están en reposo y el paquete *A* tiene una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los paquetes es de 0.3, determine *a*) la velocidad del paquete *C* después de que *A* golpea a *B* y *B* golpea a *C*, *b*) la velocidad de *A* después de que golpea a *B* por segunda vez.

- 13.161** Tres esferas de acero de igual masa se suspenden del techo mediante cuerdas de la misma longitud que están espaciadas a una distancia ligeramente mayor que el diámetro de las esferas. Después de jalarla y soltarla, la esfera *A* golpea a la esfera *B*, la cual luego golpea a la esfera *C*. Si se denota por *e* el coeficiente de restitución entre las esferas y por v_0 la velocidad de *A* justo antes de que golpee a *B*, determine *a*) las velocidades de *A* y *B* inmediatamente después del primer golpe, *b*) las velocidades de *B* y *C* inmediatamente después del segundo golpe. *c*) Si se suspenden *n* esferas del techo y que la primera se jala y libera como se describió anteriormente, determine la velocidad de la última esfera después de que recibe el primer golpe. *d*) Utilice el resultado del inciso *c* para obtener la velocidad de la última esfera cuando $n = 5$ y $e = 0.85$.

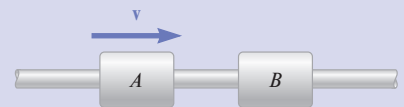


Figura P13.158

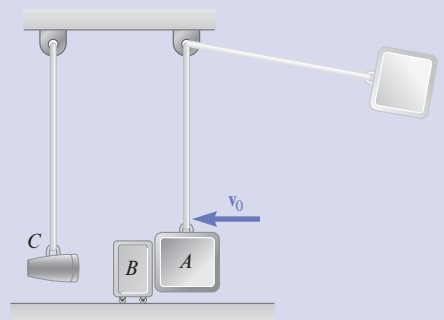


Figura P13.159

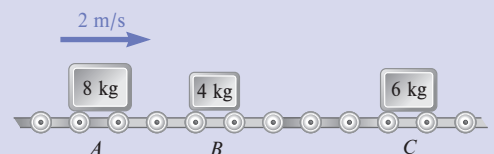


Figura P13.160

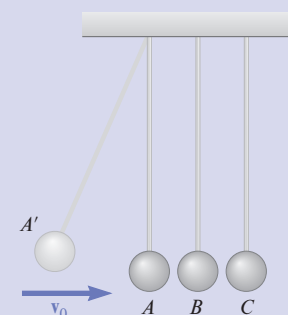


Figura P13.161

13.162 En un parque de atracciones hay carros chocadores A , B y C de 200 kg que tienen conductores con masas respectivas de 40 kg, 60 kg y 35 kg. El carro A se mueve hacia la derecha con una velocidad de $v_A = 2$ m/s y el carro C tiene una velocidad $v_C = 1.5$ m/s hacia la izquierda, pero el carro B está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución de cada carro es 0.8. Determine la velocidad final de cada carro, después de todos los impactos, suponiendo *a*) que los carros A y C golpean al carro B al mismo tiempo, *b*) el carro A golpea al carro B antes de que el carro C lo haga.

13.163 En un parque de atracciones hay carros chocadores A , B y C de 200 kg que tienen conductores con masas respectivas de 40 kg, 60 kg y 35 kg. El carro A se mueve hacia la derecha con velocidad $v_A = 2$ m/s cuando golpea al carro B estacionario. El coeficiente de restitución de cada carro es 0.8. Determine la velocidad del carro C de manera que después de que el carro B chocó con el carro C la velocidad del carro B es cero.

13.164 Dos bolas de billar pueden moverse libremente sobre una mesa. La bola A tiene una velocidad v_0 como se muestra y golpea a la bola B , que está en reposo, en el punto C definido por $\theta = 45^\circ$. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre las dos bolas es $e = 0.8$ y suponiendo que no hay fricción, determine la velocidad de cada bola después del impacto.



Figura P13.162 y P13.163

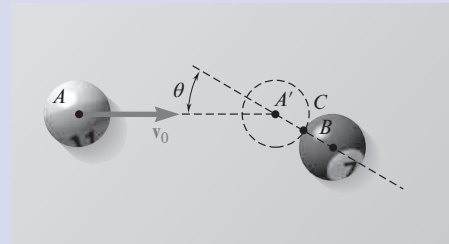


Figura P13.164

13.165 Dos piedras de curling idénticas de 40 lb tienen un diámetro de 11 pulg y pueden moverse libremente sobre una capa de hielo. La piedra B está en reposo cuando la piedra A la golpea con una rapidez de 0.5 m/s. *a*) Si se sabe que $b = 5$ pulg y $e = 0.7$, determine la velocidad de cada piedra después del impacto en términos de v_0 . *b*) Muestre que si $e = 1$, las velocidades finales de las piedras forman un ángulo recto para todos los valores de b .

13.166 Una pelota A de 600 g que se mueve a una velocidad con magnitud de 6 m/s golpea, como se muestra en la figura, a una pelota B de 1 kg que tiene una velocidad con magnitud de 4 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución es de 0.8 y se supone que no hay fricción, determine la velocidad de cada pelota después del impacto.

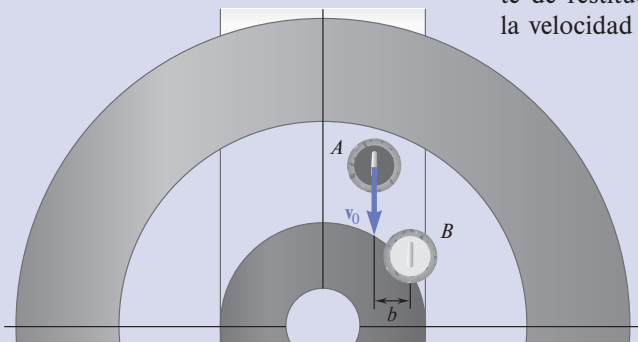


Figura P13.165

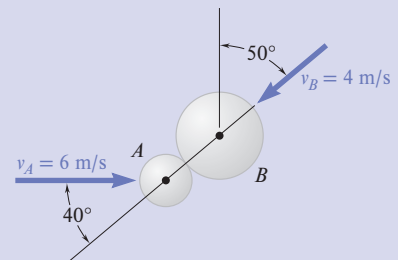


Figura P13.166

- 13.167** Dos discos de hockey idénticos se mueven sobre una pista a la misma rapidez de 3 m/s en direcciones perpendiculares cuando chocan entre sí en la forma indicada. Si se supone un coeficiente de restitución $e = 0.9$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada disco después del impacto.
- 13.168** Un jugador de billar desea que la bola A golpee la bola B de manera oblicua y luego la bola C en forma directa. Si se suponen impactos perfectamente elásticos ($e = 1$), el radio de las bolas es r , y la distancia entre los centros de B y C es d , determine *a*) el ángulo θ que define el punto D donde se debe golpear la bola B , *b*) el rango de valores de los ángulos ABC y ACB para los que es posible este tiro.

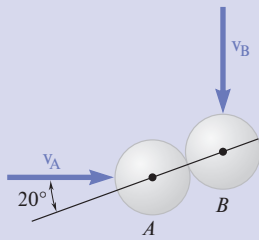


Figura P13.167

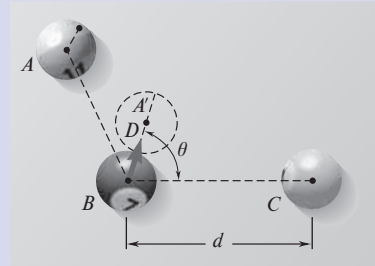


Figura P13.168

- 13.169** Un niño ubicado en A , que es el punto medio entre el centro O de una pared semicircular y la propia pared, lanza una pelota hacia la pared en una dirección que forma un ángulo de 45° con OA . Si se sabe que después de golpear la pared la pelota rebota en una dirección paralela a OA , determine el coeficiente de restitución entre la pelota y la pared.
- 13.170** La nave espacial Pathfinder usa grandes bolsas de aire para amortiguar su impacto con la superficie de Marte al momento de amortizar. Suponiendo que la nave espacial tiene una velocidad de impacto de 18.5 m/s a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal, el coeficiente de restitución es 0.85 e ignorando la fricción, determine *a*) la altura del primer rebote, *b*) la longitud del primer rebote. (La aceleración de la gravedad en Marte = 3.73 m/s^2).
- 13.171** Una esfera A de masa $m_A = 2 \text{ kg}$ viaja a una velocidad de 3 m/s cuando impacta contra la superficie inclinada sin fricción de la cuña B . La cuña de 6 kg, sostenida por rodillos y con movimiento libre en dirección horizontal, se encuentra inicialmente en reposo. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$ y que el coeficiente de restitución entre la esfera y la cuña es $e = 0.80$, determine las velocidades de la esfera y de la cuña inmediatamente después del impacto.

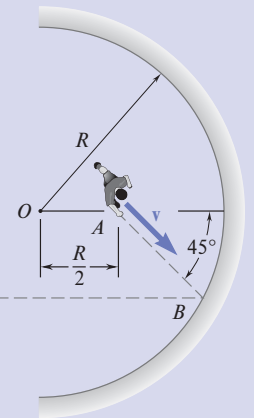


Figura P13.169

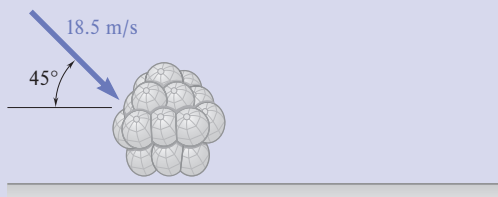


Figura P13.170

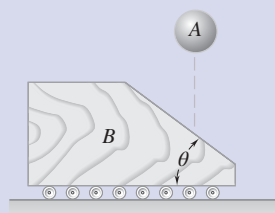


Figura P13.171

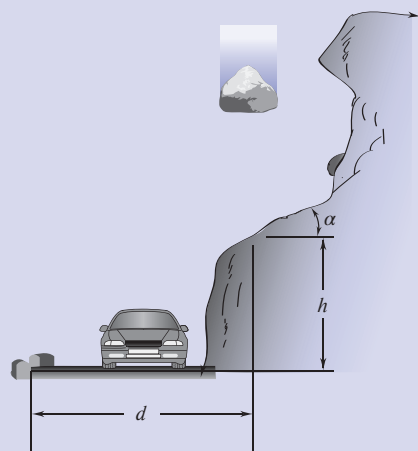


Figura P13.172 y P13.173

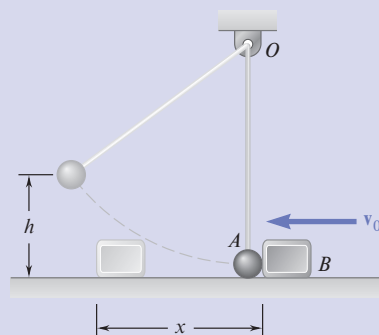
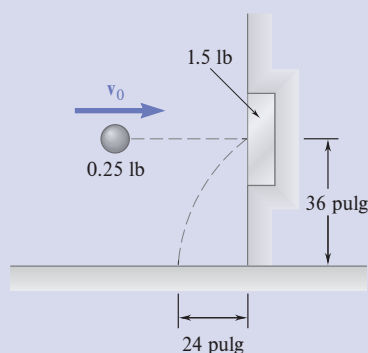
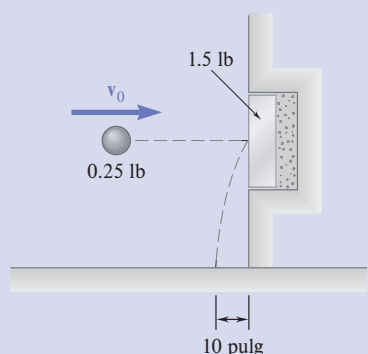


Figura P13.175



a)



b)

Figura P13.176

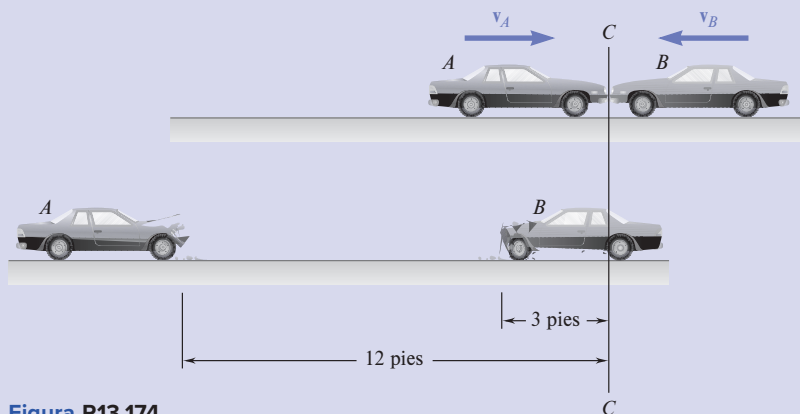


Figura P13.174

13.172 La caída de rocas puede provocar daños graves a las rutas y la infraestructura. Para diseñar puentes y barreras de mitigación, los ingenieros utilizan el coeficiente de restitución para modelar el comportamiento de las rocas. La roca A cae a una distancia de 20 metros antes de golpear un plano inclinado con una pendiente de $\alpha = 40^\circ$. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre A y el plano inclinado es de 0.2, determine la velocidad de la roca después del impacto.

13.173 De acuerdo con pruebas experimentales, las rocas más pequeñas tienden a tener un coeficiente de restitución mayor que las de más tamaño. La roca A cae una distancia de 20 metros antes de golpear un plano inclinado con una pendiente de $\alpha = 45^\circ$. Si se sabe que $h = 30$ m y $d = 20$ m, determine si una roca caerá sobre la carretera o más allá de la carretera para un coeficiente de restitución de a) $e = 0.2$, b) $e = 0.1$.

13.174 Dos automóviles de la misma masa chocan frontalmente en el punto C . Después del choque, los automóviles patinan con los frenos aplicados y se detienen en la posición que se indica en la parte inferior de la figura. Si se sabe que la rapidez del automóvil A justo antes del impacto era de 5 mi/h y que el coeficiente de fricción cinética entre el pavimento y los neumáticos de ambos automóviles es de 0.30, determine a) la rapidez del automóvil B justo antes del impacto, b) el coeficiente de restitución efectivo entre los dos automóviles.

13.175 Un bloque B de 1 kg se mueve con una velocidad v_0 de magnitud $v_0 = 2$ m/s cuando golpea una esfera A de 0.5 kg, la cual está en reposo y cuelga de una cuerda amarrada en O . Si se sabe que $\mu_k = 0.6$ entre el bloque y la superficie horizontal y que $e = 0.8$ entre el bloque y la esfera, determine después del impacto, a) la altura máxima h alcanzada por la esfera, b) la distancia x recorrida por el bloque.

13.176 Una pelota de 0.25 lb que se lanza con una velocidad horizontal v_0 golpea una placa de 1.5 lb empotrada en una pared vertical a una altura de 36 pulg sobre el suelo. Se observa que, después del rebote, la pelota golpea el suelo a una distancia de 24 pulg de la pared cuando la placa está unida rigidamente a la pared (figura P13.176a) y a una distancia de 10 pulg cuando entre la placa y la pared se coloca un plafón de caucho (figura P13.176b). Determine a) el coeficiente de restitución e entre la pelota y la placa, b) la velocidad inicial v_0 de la pelota.

13.177 Después de haber sido empujado por el empleado de una aerolínea, un carrito de equipaje A vacío de 40 kg golpea un carrito B idéntico con

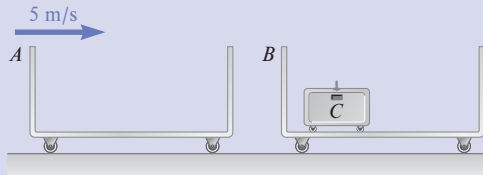


Figura P13.177

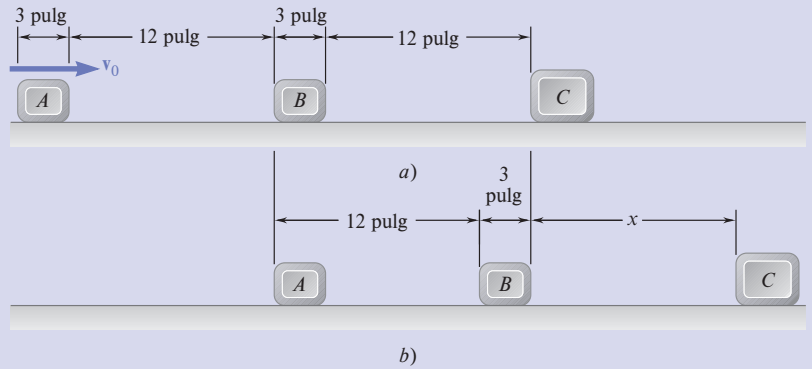


Figura P13.178

una velocidad de 5 m/s, el cual contiene una maleta de 15 kg equipada con ruedas. El impacto causa que la maleta ruede hacia la pared izquierda del carrito B. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos carritos es de 0.80 y que el coeficiente de restitución entre la maleta y la pared del carrito es de 0.30, determine a) la velocidad del carrito B después de que la maleta golpea la pared por primera vez, b) la energía total perdida en el impacto.

- 13.178** Cada uno de los bloques A y B tiene un peso de 0.8 lb y la masa del bloque C es igual a 2.4 lb. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.30$. En un principio el bloque A se mueve a una rapidez $v_0 = 15$ pies/s y los bloques B y C están en reposo (figura P13.178a). Después de que A choca con B y B choca con C, los tres bloques quedan en reposo en la posición indicada (figura P13.178b). Determine a) los coeficientes de restitución entre A y B y entre B y C, b) el desplazamiento x del bloque C.

- 13.179** Una esfera de 5 kg se deja caer desde una altura $y = 2$ m para probar un nuevo diseño de piso de resortes que se utiliza para gimnasia. La masa de la sección del piso es de 10 kg y la rigidez efectiva del piso es de $k = 120$ kN/m. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la bola y la plataforma es de 0.6, determine a) la altura h que alcanza la esfera después de rebotar, b) la fuerza máxima de los resortes.

- 13.180** Una esfera de 5 kg se deja caer desde una altura $y = 3$ m para probar un nuevo diseño de piso de resortes que se utiliza para gimnasia. La masa de la sección del piso B es 12 kg y la esfera rebota hacia arriba una distancia de 44 mm. Si se sabe que la deflexión máxima de la placa medida es de 33 mm, determine a) el coeficiente de restitución entre la esfera y el piso, b) la constante efectiva del resorte k de la sección del piso.

- 13.181** Los tres bloques que se muestran son idénticos. Los bloques B y C están en reposo cuando al bloque B lo golpea el bloque A, el cual se mueve con una velocidad v_A de 3 pies/s. Luego del impacto, que se supone perfectamente plástico ($e = 0$), la velocidad de los bloques A y B disminuye debido a la fricción, mientras que el bloque C adquiere rapidez, hasta que los tres bloques se mueven con la misma velocidad v . Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.20$, determine a) el tiempo requerido para que los tres bloques alcancen la misma velocidad, b) la distancia total recorrida por cada bloque durante ese tiempo.

- 13.182** El bloque A se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre la superficie sin fricción de B hasta que golpea un tope

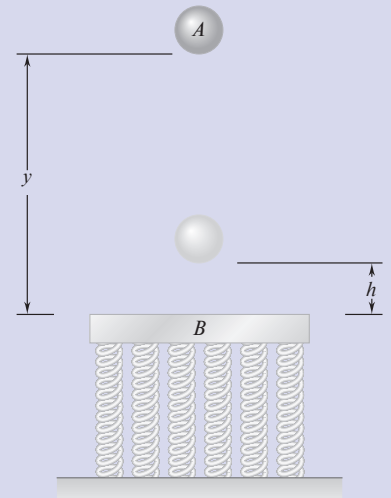


Figura P13.179 y P13.180

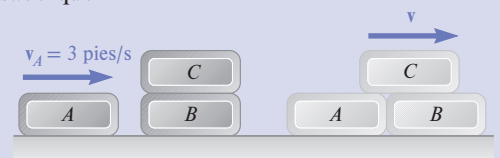


Figura P13.181

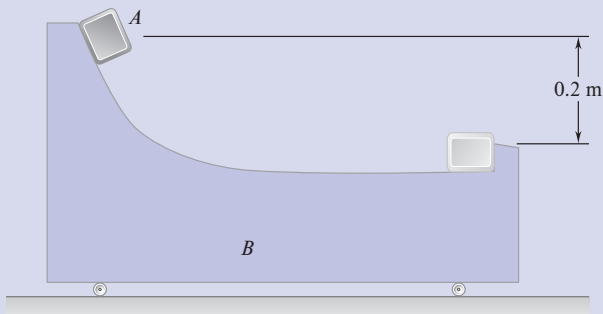


Figura P13.182

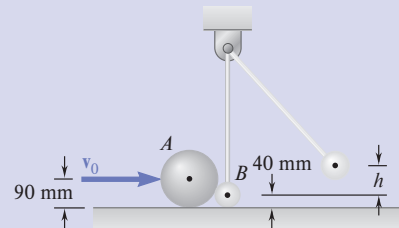


Figura P13.183

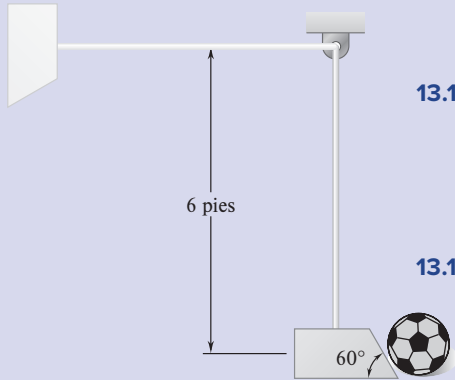


Figura P13.184

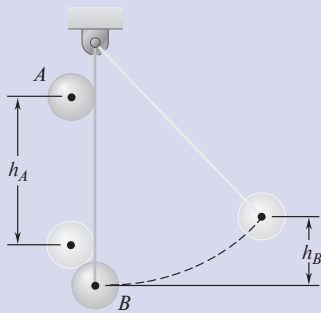


Figura P13.185

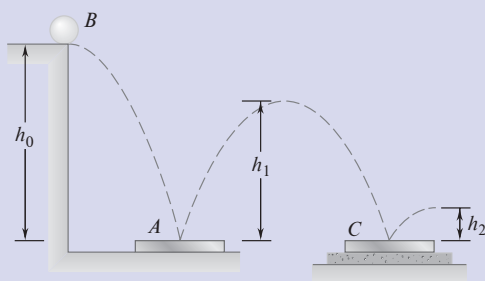


Figura P13.186

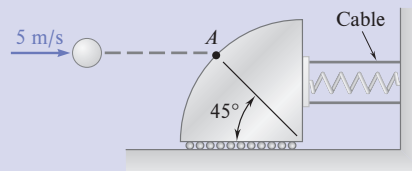


Figura P13.187

en el extremo derecho de B . El bloque A tiene una masa de 10 kg y el objeto B tiene una masa de 30 kg, además B puede rodar con toda libertad sobre el suelo. Determine las velocidades de A y B inmediatamente después del impacto cuando a) $e = 0$, b) $e = 0.7$.

13.183 Una esfera A de 23.1 kg, con radio de 90 mm, que se mueve con una velocidad de magnitud $v_0 = 2$ m/s, golpea una esfera B de 2.1 kg con radio 40 mm, la cual cuelga de una cuerda inextensible e inicialmente está en reposo. Si se sabe que la esfera B oscila a una altura máxima $h = 0.25$ m, determine el coeficiente de restitución entre las dos esferas.

13.184 Una máquina para patear pelotas de fútbol tiene un “pie simulado” de 5 lb unido al extremo de un péndulo de 6 pies de longitud. Si se sabe que el brazo se libera desde la posición horizontal y que el coeficiente de restitución entre el pie y la pelota es de 0.8, determine la velocidad de salida de la pelota a) si la pelota está inmóvil, b) si la pelota recibe el golpe mientras rueda hacia el pie con una velocidad de 10 pies/s.

13.185 La pelota B cuelga de una cuerda inextensible. Una pelota idéntica A se suelta desde el reposo cuando justo toca la cuerda y cae a través de la distancia vertical $h_A = 8$ pulg antes de golpear la pelota B . Si se supone que $e = 0.9$ y se considera que no hay fricción, determine el desplazamiento vertical máximo resultante h_B de la bola B .

13.186 Una pelota B de 70 g que se deja caer desde una altura $h_0 = 1.5$ m alcanza una altura $h_2 = 0.25$ m después de rebotar dos veces en placas idénticas de 210 g. La placa A descansa directamente sobre suelo duro, mientras que la placa C lo hace sobre un colchón de caucho. Determine a) el coeficiente de restitución entre la pelota y las placas, b) la altura h_1 del primer rebote de la pelota.

13.187 Una esfera de 2 kg que se desplaza hacia la derecha con una velocidad de 5 m/s golpea en el punto A la superficie de un cuarto de cilindro de 9 kg que inicialmente se encuentra en reposo y en contacto con un resorte de constante de 20 kN/m. El resorte está sostenido por cables por

lo que se encuentra inicialmente comprimido 50 mm. Sin tener en cuenta la fricción y si se sabe que el coeficiente de restitución es 0.6, determine *a*) la velocidad de la esfera inmediatamente después del impacto, *b*) la fuerza compresiva máxima del resorte.

- 13.188** Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30^\circ$ la esfera *A* de 1 lb tiene una rapidez $v_0 = 4$ pies/s. El coeficiente de restitución entre *A* y la cuña *B* de 2 lb es 0.7 y la longitud de la cuerda $l = 2.6$ pies. La constante del resorte tiene un valor de 2 lb/pulg y $\theta = 20^\circ$. Determine *a*) la velocidad de *A* y *B* inmediatamente después del impacto. *b*) la deflexión máxima del resorte suponiendo que *A* no golpea a *B* de nuevo después de este punto.

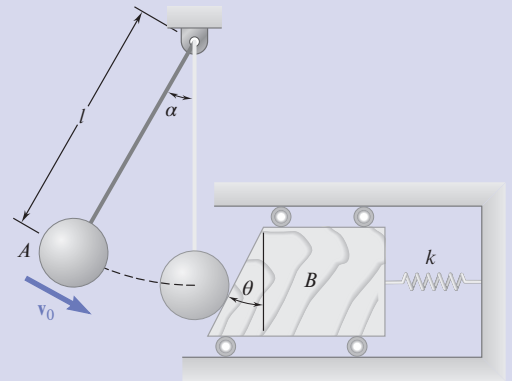


Figura P13.188 y P13.189

- 13.189** Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30^\circ$ la esfera *A* de 1 kg tiene una rapidez $v_0 = 0.6$ m/s. El coeficiente de restitución entre *A* y la cuña *B* de 2 kg es 0.8 y la longitud de la cuerda $l = 0.9$ m. La constante del resorte tiene un valor de 1 500 N/m y $\theta = 20^\circ$. Determine *a*) la velocidad de *A* y *B* inmediatamente después del impacto y *b*) la deflexión máxima del resorte suponiendo que *A* no vuelve a golpear a *B* antes de este punto.

Repaso y resumen

Este capítulo se dedicó al método del trabajo y la energía y al del impulso y la cantidad de movimiento. En la primera mitad del capítulo se estudió el método del trabajo y la energía y su aplicación al análisis del movimiento de las partículas.

Trabajo de una fuerza

Se consideró una fuerza $\mathbf{F}$ que actuaba sobre una partícula *A* y se definió el trabajo de $\mathbf{F}$ correspondiente al pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$ (sección 13.1) como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.1)$$

o, si se recuerda la definición del producto escalar de dos vectores,

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (13.1')$$

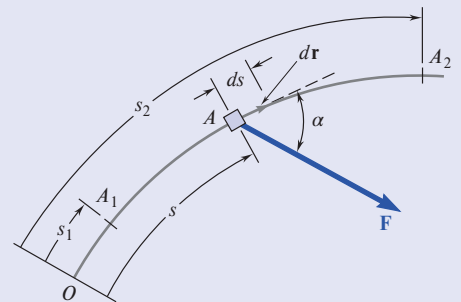


Figura 13.30

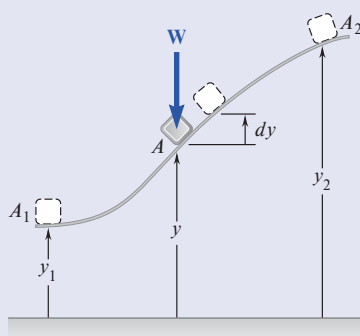


Figura 13.31

donde α es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{r}$ (figura 13.30). El trabajo de $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento finito desde A_1 hasta A_2 , denotado por $U_{1 \rightarrow 2}$, se obtuvo al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.2)$$

Para una fuerza definida por sus componentes rectangulares, se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.2'')$$

Trabajo de un peso

El trabajo del peso $\mathbf{W}$ de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve desde la altura y_1 hasta y_2 (figura 13.31) se obtuvo al sustituir $F_x = F_z = 0$ y $F_y = -W$ en la ecuación (13.2'') e integrar. Se encuentra

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte lineal

El trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ ejercida por un resorte sobre un cuerpo A durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 13.32) desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtuvo al escribir

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

El trabajo de $\mathbf{F}$ es por tanto positivo cuando el resorte regresa a su posición no deformada.

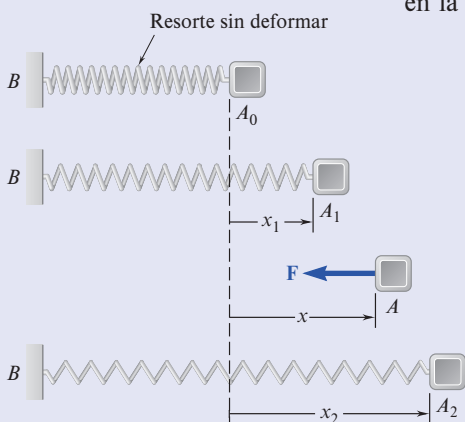


Figura 13.32

Trabajo de la fuerza gravitacional

El trabajo de la fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ ejercido por una partícula de masa M localizada en O sobre una partícula de masa m cuando la última se desplaza desde A_1 hasta A_2 (figura 13.33) se obtuvo al recordar de la sección 12.2C la expresión para la magnitud de $\mathbf{F}$ y al escribir

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

Energía cinética de una partícula

La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ (sección 13.1B) se definió como la cantidad escalar

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

Principio del trabajo y la energía

De la segunda ley de Newton se dedujo el principio del trabajo y la energía, el cual señala que la energía cinética de una partícula en A_2 puede obtenerse sumando a su energía cinética en A_1 el trabajo realizado durante el desplazamiento de A_1 a A_2 por la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre la partícula:

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

Método del trabajo y la energía

El método del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas que tienen que ver con fuerzas, desplazamientos y velocidades, ya que no requiere la determinación de aceleraciones (sección 13.1C). Además, se advirtió que solo incluye cantidades escalares y que las fuerzas que no realizan trabajo no necesitan considerarse (problemas modelo 13.1 y 13.4). Sin embargo, este método debe

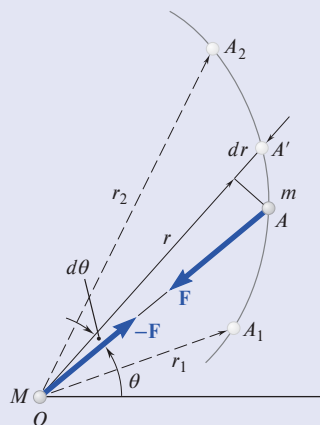


Figura 13.33

complementarse con la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar una fuerza normal a la trayectoria de la partícula (problema modelo 13.6).

Potencia y eficiencia mecánica

La potencia desarrollada por una máquina y su eficiencia mecánica se estudiaron en la sección 13.1D. La potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.12, 13.13)$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza que se ejerce sobre la partícula y $\mathbf{v}$ la velocidad de esta misma (problema modelo 13.7). La **eficiencia mecánica**, denotada por η , se expresó como

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (13.15)$$

Fuerza conservativa y energía potencial

Cuando el trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria que se sigue (secciones 13.2A y 13.2B), se afirma que la fuerza $\mathbf{F}$ es una **fuerza conservativa**, y que su trabajo es igual al negativo del cambio en la energía potencial V asociado con $\mathbf{F}$:

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

Las siguientes expresiones se obtuvieron para la energía potencial asociada con cada una de las fuerzas consideradas antes:

Fuerza de gravedad (peso):

$$V_g = Wy \quad (13.16)$$

Fuerza gravitacional:

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$$

Fuerza elástica ejercida por un resorte lineal:

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$$

Principio de la conservación de la energía

Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de la ecuación (13.19') en la ecuación (13.11) y reagrupar los términos (sección 13.2C), se obtuvo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

o

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (13.24')$$

Este es el **principio de la conservación de la energía**, el cual establece que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante. La aplicación de este principio facilita la solución de problemas que incluyen únicamente fuerzas conservativas (problemas modelo 13.8 y 13.9).

Expresión alternativa para el principio del trabajo y la energía

En lugar de hallar el trabajo por todas las fuerzas externas, se puede escribir una expresión alternativa para el principio de trabajo-energía, como

$$T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2} \quad (13.24'')$$

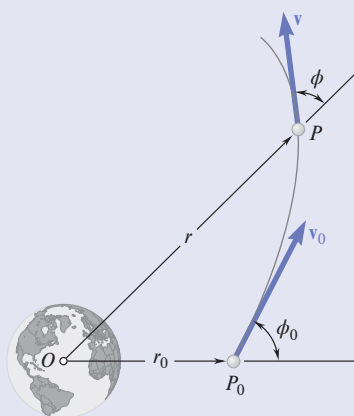


Figura 13.34

donde $U_{1 \rightarrow 2}^{\text{NC}}$ es el trabajo de fuerzas externas no conservativas como la fricción (problema modelo 13.10).

Movimiento bajo una fuerza gravitacional

Al recordar de la sección 12.2B que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central $\mathbf{F}$, su cantidad de movimiento angular alrededor del centro de fuerza O permanece constante. Si la fuerza central $\mathbf{F}$ también es conservativa, es posible utilizar de manera conjunta los principios de la conservación de la cantidad de momento angular y de la conservación de la energía para analizar el movimiento de la partícula (problema modelo 13.11). Puesto que la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un vehículo espacial es tanto central como conservativa, se utilizó este enfoque para estudiar el movimiento de tales vehículos (problema modelo 13.12) y se encontró que era en particular efectivo en el caso de un **lanzamiento oblicuo**. Al considerar la posición inicial P_0 y una posición arbitraria P del vehículo (figura 13.34), se escribió

$$(H_O)_0 = H_O: \quad r_0 m v_0 \sin \phi_0 = r m v \sin \phi \quad (13.25)$$

$$T_0 + V_0 = T + V: \quad \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M m}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} \quad (13.26)$$

donde m fue la masa del vehículo y M la masa de la Tierra.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula

La segunda mitad del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento y su aplicación a la solución de diversos tipos de problemas que implican el movimiento de partículas.

La cantidad de **movimiento lineal de una partícula** se definió (sección 13.3A) como el producto $m\mathbf{v}$ de la masa m de la partícula y su velocidad $\mathbf{v}$. De la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se dedujo la relación

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 \quad (13.28)$$

donde $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ representan la cantidad de movimiento de la partícula en un tiempo t_1 y en un tiempo t_2 , respectivamente, y donde la integral define el **impulso lineal de la fuerza $\mathbf{F}$** durante el intervalo correspondiente. Por tanto, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.30)$$

que expresa el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula.

Cuando la partícula considerada está sujeta a varias fuerzas, se usa la suma de los impulsos de estas fuerzas; lo que dio

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \text{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

Puesto que las ecuaciones (13.30) y (13.32) implican cantidades vectoriales, es necesario considerar por separado sus componentes x y y cuando se aplican a la solución de un problema determinado (problemas modelo 13.13, 13.14 y 13.15).

Movimiento impulsivo

El método del impulso y de la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el estudio del **movimiento impulsivo** de una partícula, cuando fuerzas muy grandes, denominadas **fuerzas impulsivas**, se aplican durante el intervalo Δt (sección 13.3B). Ignorando el impulso de toda fuerza no impulsiva, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}_{\text{prom}} \Delta t = m\mathbf{v}_2 \quad (13.35)$$

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas se tuvo

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{F}_{\text{prom}} \Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.36)$$

donde el segundo término implica solo fuerzas externas impulsivas (problema modelo 13.17).

En el caso particular en el que la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero, la ecuación (13.36) se reduce a $\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$; esto es, la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva. Para dos partículas se reduce a:

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B \quad (13.34')$$

Impacto central directo

En la sección 13.4 se consideró el **impacto central** de dos cuerpos que chocan. En el caso de un **impacto central directo** (sección 13.4A), los dos cuerpos que chocan A y B se movían a lo largo de la **línea de impacto** con velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, respectivamente (figura 13.35). Podrían usarse dos ecuaciones para determinar sus velocidades $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$ después del impacto. La primera expresaba la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos,

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B \quad (13.37)$$

donde un signo positivo indica que la velocidad correspondiente está dirigida hacia la derecha, en tanto que la segunda denominada ecuación de restitución relaciona las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

La constante e se conoce como el **coeficiente de restitución**; su valor se encuentra entre 0 y 1 y depende en gran medida de los materiales implicados. Cuando $e = 0$, se dice que el impacto es **perfectamente plástico**; cuando $e = 1$, se afirma que es **perfectamente elástico**. La ecuación (13.43) solo es válida para el impacto central directo (problema modelo 13.18).

Impacto central oblicuo

En el caso de un **impacto central oblicuo** (sección 13.4B), las velocidades de los dos cuerpos que chocan antes y después del impacto se descompusieron en las componentes n a lo largo de la línea de impacto y de las componentes t a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto (figura 13.36). Se observó que la componente t de la velocidad de cada cuerpo permaneció inalterada, en tanto que las componentes n satisfacían ecuaciones similares a las ecuaciones (13.37) y (13.43) (problemas modelo 13.19 y 13.20). Se demostró que, aunque este método se desarrolló para cuerpos que se mueven con libertad antes y después del impacto, sería posible extenderlo al caso en el que uno o ambos de los cuerpos que chocan presentan restricciones en su movimiento (problema modelo 13.21). Cuando las velocidades no se encuentran sobre la línea de impacto, la ecuación del coeficiente de restitución utiliza la componente normal

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

Empleo de los tres métodos fundamentales del análisis cinético

En la sección 13.4C se analizaron las ventajas relativas de los tres métodos fundamentales que se presentaron en este capítulo y en el precedente, esto es, la segunda ley de Newton, el trabajo y la energía, y el impulso y la cantidad de movimiento. Se señaló que el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento pueden combinarse para resolver problemas que implican una fase corta de impacto durante la cual las fuerzas impulsivas deben tomarse en cuenta (problemas modelo 13.22 y 13.23).

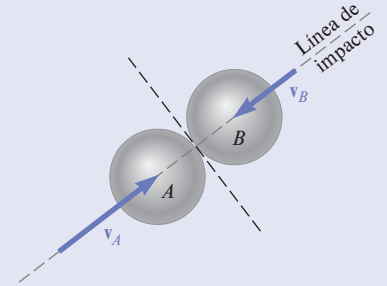


Figura 13.35

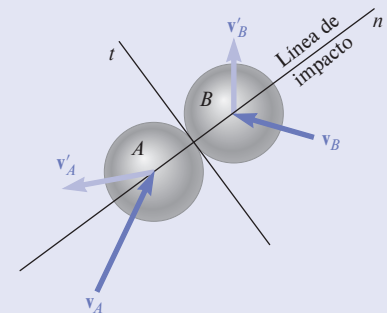


Figura 13.36

Problemas de repaso

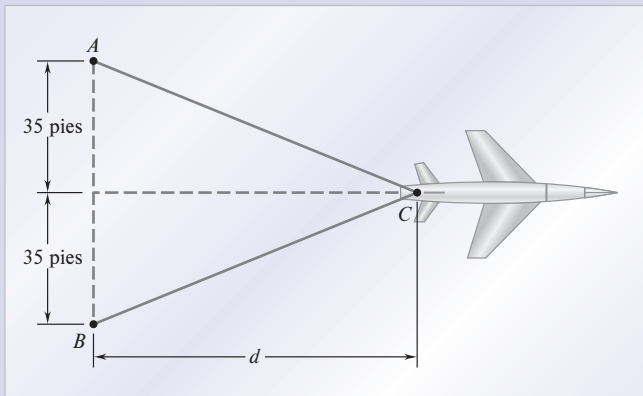


Figura P13.190

13.190 Un avión de 34 000 lb aterriza sobre un portaaviones y es frenado por un cable de detención. El cable es inextensible y se desenrolla en A y B mediante mecanismos ubicados bajo cubierta; los mecanismos consisten en pistones que se mueven en largos cilindros llenos de aceite. El sistema de pistón-cilindro está diseñado para mantener una tensión constante en el cable. Si se sabe que la rapidez de aterrizaje es 110 mi/h y que el avión viaja una distancia $d = 90$ pies después de entrar en contacto con el cable de detención, determine la tensión en el cable.

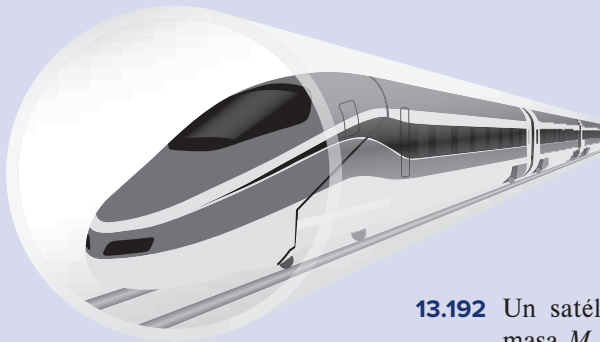


Figura P13.191

13.191 Existe un interés renovado en los sistemas de transporte por tubos neumáticos (por ejemplo, el Hyperloop®). Estos sistemas evacúan la mayor parte del aire de cilindros sellados y, por lo general, las cápsulas de pasajeros flotan en el aire; ambos factores minimizan la resistencia. La cápsula de pasajeros inicia su movimiento desde el reposo y sube 1 250 pies sobre un paso de montaña. Si se sabe que el peso de una cápsula de pasajeros es 50 000 lb, determine la cantidad de energía que los motores de inducción lineales necesitarán suministrar si la cápsula viaja a 300 mi/h en la parte superior del paso.

13.192 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M . Los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta son, respectivamente, r_0 y r_1 . Utilice los principios de la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento angular para obtener la relación

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite y G es la constante de gravitación.

13.193 Una sección de la vía de una montaña rusa consta de dos arcos circulares AB y CD unidos por una parte recta BC . El radio de AB es de 27 m

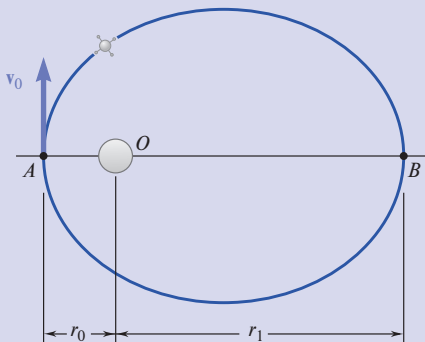


Figura P13.192

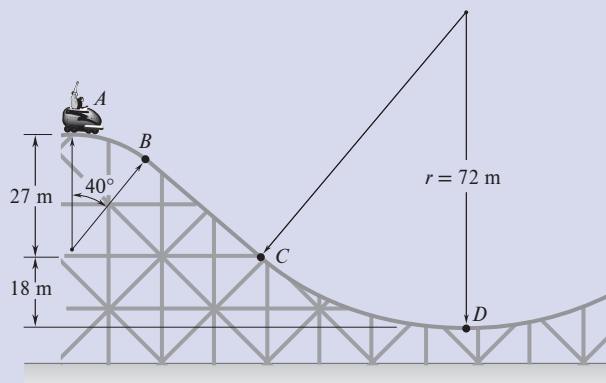


Figura P13.193

y el radio de CD es de 72 m. El vagón y sus ocupantes, con una masa total de 250 kg, llegan al punto A prácticamente sin velocidad y, luego, caen en forma libre por la pista. Determine los valores máximo y mínimo de la fuerza normal ejercida por la pista sobre el vagón cuando este se desplaza de A a D . No tome en cuenta la resistencia del aire y la resistencia a la rodadura.

- 13.194** Dos piedras idénticas de curling, cada una de 40 lb, tienen un diámetro de 11 pulg y pueden deslizarse sobre una capa de hielo. La piedra B está en reposo cuando la piedra A la golpea, moviéndola hacia el centro del círculo interior. La distancia que recorre A antes de golpear B es de 108 pies, y las barredoras que limpian el hielo reducen el coeficiente de fricción entre A y el hielo a 0.04, mientras que el coeficiente de fricción cinética entre B y el hielo es 0.1. El coeficiente de restitución entre A y B es 0.6. Sin tomar en cuenta la rotación y sabiendo que B se desplaza a 4 pies a lo largo de la línea punteada, determine a) la distancia b , b) la rapidez que tiene A cuando se libera a 108 pies desde el impacto.

- 13.195** Un bloque de 300 g se suelta desde el reposo después de que un resorte de constante $k = 600 \text{ N/m}$ se ha comprimido 160 mm. Determine la fuerza ejercida por el lazo $ABCD$ sobre el bloque cuando este último pasa por a) el punto A , b) el punto B , c) el punto C . Suponga que no hay fricción.

- 13.196** Un accesorio “para patear” se coloca delante de una silla de ruedas y permite que los atletas con movilidad reducida jueguen al fútbol. Los atletas cargan el resorte de la figura mediante un mecanismo de ruedas dentadas que lleva el “pie” de 2 kg hacia atrás a la posición 1. Luego, liberan el “pie” para golpear la pelota de fútbol de 0.45 kg que va rodando hacia el “pie” con una rapidez de 2 m/s con un ángulo de $\theta = 30^\circ$ como se ilustra. El impacto ocurre con un coeficiente de restitución $e = 0.75$ cuando el pie se encuentra en la posición 2, donde el resorte no se encuentra estirado. Si se sabe que el coeficiente de fricción mientras la pelota rueda es $\mu_k = 0.1$, determine a) el coeficiente del resorte necesario para hacer que la pelota ruede 30 metros, b) la dirección en la que la pelota se desplazará después de recibir el golpe.

- 13.197** Una pelota de baloncesto de 625 g y una pelota de tenis de 58.5 g se dejan caer desde una altura $d = 1.5 \text{ m}$ hasta el piso. El coeficiente de restitución

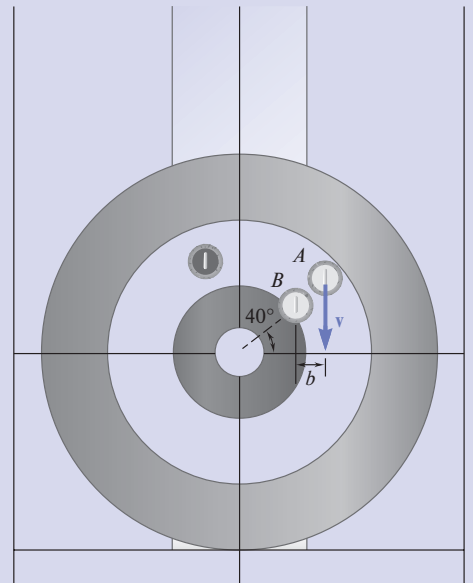


Figura P13.194

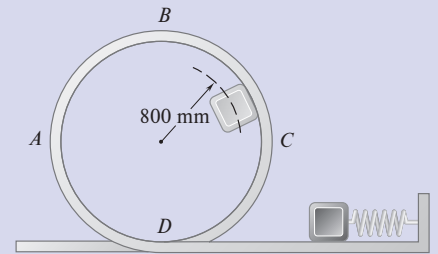


Figura P13.195

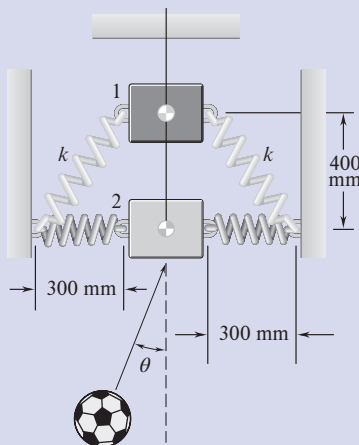


Figura P13.196

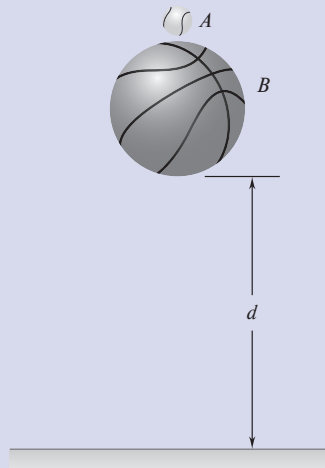


Figura P13.197

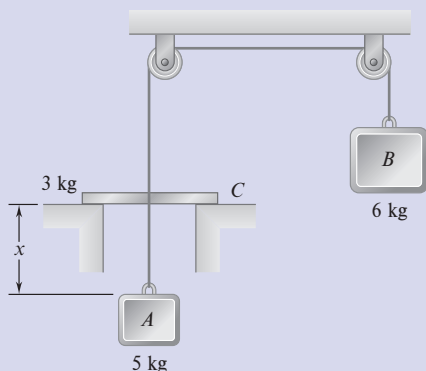


Figura P13.198

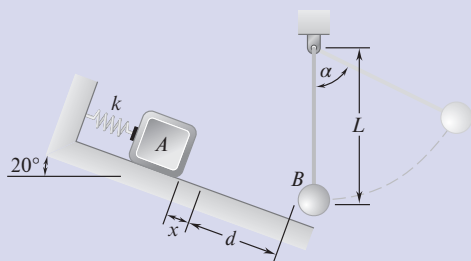


Figura P13.200

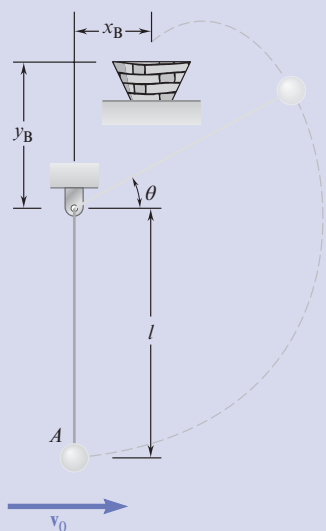


Figura P13.201

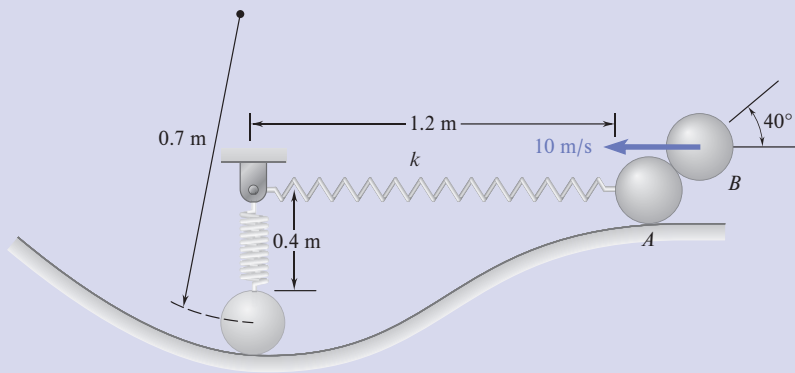


Figura P13.199

entre la pelota de baloncesto y el suelo es de 0.85 y el coeficiente de restitución entre la pelota de tenis y la pelota de baloncesto es de 0.9. Si se sabe que hay un pequeño espacio entre las pelotas cuando caen, determine la altura máxima de la pelota de tenis después del impacto.

- 13.198** Los bloques A y B están conectados mediante una cuerda que pasa sobre poleas y a través de un collarín C . El sistema se suelta desde el reposo cuando $x = 1.7$ m. Mientras el bloque A sube, golpea al collarín C con un impacto perfectamente plástico ($e = 0$). Después del impacto los dos bloques y el collarín siguen moviéndose hasta que se detienen e invierten su movimiento. Cuando A y C se mueven hacia abajo, C golpea la repisa y los bloques A y B siguen moviéndose hasta que llegan a otro tope. Determine a) la velocidad de los bloques y el collarín, inmediatamente después de que A golpea a C , b) la distancia que recorren los bloques y el collarín después del impacto y antes de detenerse, c) el valor de x al final de un ciclo completo.

- 13.199** Una bola B de 2 kg viaja horizontalmente a 10 m/s cuando golpea una bola A de 2 kg. La bola A se encuentra al principio en reposo y está unida al resorte con constante 100 N/m y una longitud sin estirar de 1.2 m. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre A y B es 0.8 y la fricción entre todas las superficies es despreciable, determine la fuerza normal entre A y el suelo cuando esta se encuentra en la parte baja de la cuesta.

- 13.200** Un bloque A de 2 kg se empuja hacia arriba contra un resorte, comprimiéndolo una distancia x . Después el bloque se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre el plano inclinado de 20° hasta que golpea una esfera B de 1 kg que se encuentra suspendida de una cuerda inextensible de 1 m. La constante del resorte es $k = 800$ N/m, el coeficiente de fricción entre A y el suelo es 0.2, la distancia que se desliza A desde la longitud sin estirar del resorte es $d = 1.5$ m y el coeficiente de restitución entre A y B es 0.8. Cuando $\alpha = 30^\circ$, determine la compresión inicial x del resorte.

- *13.201** La bola A de 2 lb se suspende mediante una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de v_0 . Si $l = 2$ pies, $x_B = 0.3$ pies y $y_B = 0.4$ pies, determine la velocidad inicial v_0 de modo que la bola entre en la canasta. (Sugerencia: Use una computadora para resolver el conjunto resultante de las ecuaciones).