



FERDINAND P. BEER
E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
DAVID F. MAZUREK

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

ESTÁTICA

13ª edición

Mc
Graw
Hill

Mecánica vectorial para ingenieros

Estática

Decimotercera edición

Ferdinand P. Beer

Excatedrático de la Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.

Excatedrático de la University of Connecticut

David F. Mazurek

Academia de la Guardia Costera de EEUU

Prefacio

Objetivos

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar principios básicos en su solución. La comprensión exhaustiva de dichos principios básicos es esencial para resolver problemas de mecánica con éxito. Se espera que este texto, así como el libro complementario, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*, permitan que el profesor alcance este objetivo.

Enfoque general

En la parte inicial del texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más conciso y simple. Sin embargo, el énfasis del libro se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en este libro es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2), después de haber presentado las reglas para la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran solo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introducen los productos escalar y vectorial de dos vectores, y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los sistemas de fuerzas equivalentes que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.
- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y cantidad de movimiento, y se aplican en primera instancia a la resolución de problemas que solo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples. Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más rele-



vantes de los problemas considerados y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones parciales y de indeterminación estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.

Los principios fundamentales se ubican en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido en este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, las aplicaciones más simples se consideran primero. Por ejemplo:

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas internas se posponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanares, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales, los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial, se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

Enfoque sistemático de resolución de problemas. Todos los problemas de ejemplo se resuelven usando los pasos de Estrategia, Modelar, Analizar, Revisar y Pensar o enfoque “EMARP”. La intención de esta metodología es dar confianza a los estudiantes para resolver problemas nuevos y alentarlos a aplicar este enfoque en todos los problemas que les sean asignados.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se destaca su importancia a lo largo de todo el texto. No solo se emplean para resolver problemas de equilibrio, sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las “ecuaciones de diagramas de cuerpo libre” en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades del SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), las unidades del SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60% de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa más que aplicar factores de conversión. Como las unidades del SI se consideran un

17.1 MÉTODOS DE LA ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

El principio del trabajo y la energía se utilizará ahora para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se señaló en el capítulo 13, este método en particular se adapta bien a la solución de problemas en los que intervienen velocidades y desplazamientos. Su ventaja principal radica en el hecho de que el trabajo de fuerzas y la energía cinética de partículas son cantidades escalares.

17.1A Principio del trabajo y la energía

Para aplicar el principio del trabajo y la energía al movimiento de un cuerpo rígido, se supondrá otra vez que el cuerpo rígido está compuesto por un gran número n de partículas de masa Δm_i . Si se recuerda la ecuación (14.30) de la sección 14.2B, se tiene

Principio del trabajo y la energía, cuerpo rígido

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T_1, T_2 = valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman al cuerpo rígido
 $U_{1 \rightarrow 2}$ = trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo

Al igual que se hizo en el capítulo 13, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas se puede expresar como $U_{1 \rightarrow 2}^{nc}$, y se pueden definir los términos de la energía potencial para las fuerzas conservativas. Entonces, la ecuación (17.1) se puede expresar como

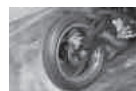
$$T_1 + V_1 + U_{1 \rightarrow 2}^{nc} = T_2 + V_2 + U_{1 \rightarrow 2}^{nc} \quad (17.1')$$

donde V_1 y V_2 son la energía gravitacional potencial inicial y final del centro de masa del cuerpo rígido con respecto a un punto de referencia, y V_1 y V_2 son los valores inicial y final de la energía elástica asociada con los resortes en el sistema. Se obtiene la energía cinética total

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 \quad (17.2)$$

al sumar cantidades escalares positivas, y ella misma es una cantidad escalar positiva. Después se verá cómo puede determinarse T para diversos tipos de movimiento de un cuerpo rígido.

La expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en la ecuación (17.1) representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo, ya sea que estas fuerzas sean internas o externas. Sin embargo, el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un cuerpo rígido es cero. Considere dos partículas A y B de un cuerpo rígido y las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que se ejercen entre sí (figura 17.1). Mientras que, en general, los pequeños desplazamientos $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra forma, las partículas no permanecerían a la misma distancia una de otra y el cuerpo no sería rígido. Por tanto, el trabajo de $\mathbf{F}$ es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero. Así, el trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero, y la expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en la ecuación (17.1) se reduce al trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo durante el desplazamiento considerado.



Fotografía 17.1 El trabajo realizado por la fricción reduce la energía cinética del neumático. (Richard McDowell/Getty Images Photo)

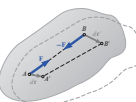


Figura 17.1 El trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero.

Problema modelo 3.10

Tres cables están unidos a una mensula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A .

ESTRATEGIA: Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Luego, se suman las fuerzas y momentos.

MODELAR Y ANALIZAR: Obsérvese que $F_B = (700 \text{ N})\lambda_{AB}$ donde $\lambda_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{BA}}{r_{BA}} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$

Si se utilizan metros y newtons, la posición y los vectores de fuerza son

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BA} &= \mathbf{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{CA} &= \mathbf{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{DA} &= \mathbf{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1.039\mathbf{j} \end{aligned}$$

El sistema fuerza-par en A , equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x , y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1.607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k}$$

El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.1F). Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_B &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}_C &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{DA} \times \mathbf{F}_D &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1.039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k} \end{aligned}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (118.9 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

(continúa)

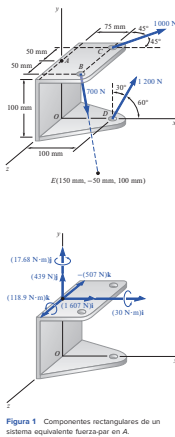


Figura 1 Componentes rectangulares de un sistema equivalente fuerza-par en A .

pero
por tanto

$$OB \cos 60^\circ = d$$

$$OB = 10 \text{ pulg.}$$

• Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos b), c) y d) es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas producen el mismo momento con respecto a O , sus componentes en x y y son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.

REVISAR Y PENSAR: Las distintas combinaciones de fuerza y de brazo de momento pueden generar momentos equivalentes, pero el sistema de fuerzas y momento produce un efecto general distinto en cada caso.

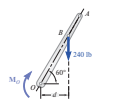


Figura 4 Posición de la fuerza vertical de 240 lb que crea un momento igual con respecto a O .

sistema absoluto basado en unidades de tiempo, longitud y masa; mientras que el Sistema Inglés es un sistema gravitacional basado en unidades de tiempo, longitud y fuerza, se requieren diferentes enfoques para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades del SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

El *Manual de soluciones del profesor* proporciona seis listas diferentes de asignaciones para que sea posible seleccionar un número igual de problemas expresados en unidades del SI y en unidades de uso común en Estados Unidos. Si así se desea, también es posible seleccionar dos listas completas de asignaciones con hasta 75% de los problemas expresados en unidades del SI.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones adicionales se encuentran la reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión, aplicaciones a hidrostática, equilibrio de cables, productos de inercia y círculo de Mohr, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, y el método del trabajo virtual. Las secciones que tratan acerca de las propiedades de inercia de cuerpos tridimensionales fueron pensadas primordialmente para los estudiantes que después estudiarán, en dinámica, el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elemental; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general, se pone mayor énfasis en la comprensión adecuada de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.



©St Petersburg Times/Zumapress/Newscom

3

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerzas

Cuatro remolcadores trabajan juntos para liberar al petrolero *Coastal Eagle Point*, que encalló al intentar navegar en un canal en la bahía de Tampa. En este capítulo se mostrará que las fuerzas ejercidas por los remolcadores sobre el barco pueden sustituirse por una fuerza equivalente ejercida por un solo remolcador más potente.

Introducción

3.1 FUERZAS Y MOMENTOS

3.1A Fuerzas externas e internas

3.1B Principio de transmisibilidad: fuerzas equivalentes

3.1C Productos vectoriales

3.1D Componentes rectangulares de productos vectoriales

3.1E Momento de una fuerza con respecto a un punto

3.1F Componentes rectangulares del momento de una fuerza

3.2 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

3.2A Productos escalares

3.2B Triples productos mixtos

3.2C Momento de una fuerza con respecto a un eje dado

3.3 PARES Y SISTEMA FUERZA-PAR

3.3A Momento de un par

3.3B Pares equivalentes

3.3C Adición o suma de pares

3.3D Vectores de pares

3.3E Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par

3.4 SIMPLIFICACIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

3.4A Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par

3.4B Sistemas equivalentes y equipolentes de fuerzas

3.4C Otras reducciones de un sistema de fuerzas

*3.4D Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

Objetivos

- **Debatir** el principio de transmisibilidad que permite considerar una fuerza como un vector deslizante.
- **Definir** el momento de una fuerza con respecto a un punto.
- **Examinar** productos vectoriales y escalares que resultan útiles en análisis que involucren momentos.
- **Aplicar** el teorema de Varignon para simplificar determinados análisis de momento.
- **Definir** el triple producto mixto y utilizarlo para determinar el momento de una fuerza con respecto a un eje.
- **Definir** el momento de un par y considerar las propiedades particulares de los pares.
- **Descomponer** una fuerza dada en un sistema equivalente fuerza-par en otro punto.
- **Reducir** un sistema de fuerzas en un sistema equivalente fuerza-par.
- **Examinar** las circunstancias en las que un sistema de fuerzas puede reducirse a una sola fuerza.
- **Definir** una llave de torsión o torsor y considerar cómo cualquier sistema de fuerzas general puede reducirse a una llave de torsión.

Introducción

En el capítulo 2 asumimos que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. En este caso, tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son rígidos. Un **cuerpo rígido** es aquel que no se deforma. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general, esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia, a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.1B.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.1E) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.2C). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y

sentidos opuestos (sección 3.3A). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado *par resultante* del sistema.

3.1 FUERZAS Y MOMENTOS

La definición básica de una fuerza no cambia si la misma actúa sobre un punto o sobre un cuerpo rígido. Sin embargo, sus efectos pueden variar según factores como el punto de aplicación o la línea de acción de la fuerza. En consecuencia, los cálculos que involucran fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido suelen ser más complicados que las situaciones en las que la fuerza actúa sobre un cierto punto. A continuación, se examinarán algunas de las clasificaciones generales de las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

3.1A Fuerzas externas e internas

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas*.

1. Las **fuerzas externas** son aquellas que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido, ya que producen que el cuerpo se mueva o aseguran que este permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán solo las fuerzas externas.
2. Las **fuerzas internas** mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si este está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Las fuerzas internas se estudiarán en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por tres personas mediante una cuerda unida a la defensa delantera (figura 3.1a). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un **diagrama de cuerpo libre** (figura 3.1b). Obsérvese que este diagrama de cuerpo libre muestra el objeto entero, no solo una partícula en representación del mismo. En primer lugar, se debe considerar el **peso** del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, este se puede representar por medio de una sola fuerza $\mathbf{W}$. El **punto de aplicación** de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el **centro de gravedad** del camión. (En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad). El peso $\mathbf{W}$ hace que el camión se desplace hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del suelo, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Estas fuerzas son ejercidas *por* el suelo *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

Las personas ejercen la fuerza $\mathbf{F}$ al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de $\mathbf{F}$ está en la defensa delantera. La fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha ignorado la oposición al movimiento). Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el suelo del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen

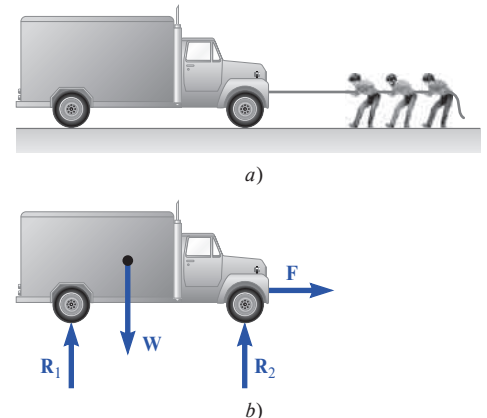


Figura 3.1 a) Tres personas arrastran un camión mediante una cuerda; b) diagrama de cuerpo libre del camión, representado como un solo objeto en lugar de como una partícula.

verticales), se conoce como **traslación**. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una **rotación**. Por tanto, se puede concluir que cada una de las *fuerzas externas* que actúan sobre un *cuerpo rígido* puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

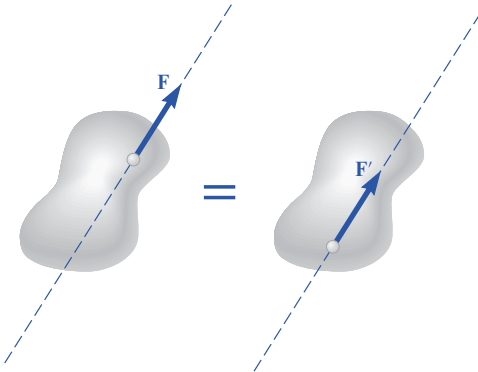


Figura 3.2 Dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección y la misma línea de acción, incluso si actúan en puntos distintos.

3.1B Principio de transmisibilidad: fuerzas equivalentes

El **principio de transmisibilidad** establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza $\mathbf{F}'$ que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.2). Las dos fuerzas, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$, producen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son **fuerzas equivalentes**. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. (Como se verá en la sección 16.1D, el principio de transmisibilidad *puede* ser derivado a partir del estudio de la dinámica de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere el uso de la segunda y tercera leyes de Newton, y también algunos otros conceptos). Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma, y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. En el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el **vector deslizante**, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de sus líneas de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, esta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza $\mathbf{F}$ es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.3). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad, se puede reemplazar $\mathbf{F}$ por una *fuerza equivalente* $\mathbf{F}'$ que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas

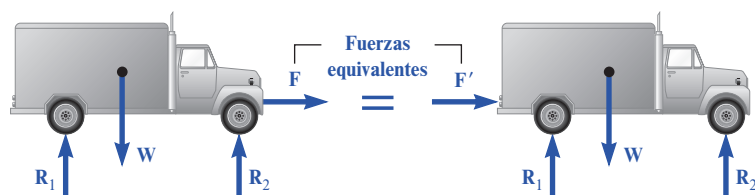


Figura 3.3 La fuerza $\mathbf{F}'$ es equivalente a la fuerza $\mathbf{F}$; por tanto, el movimiento del camión es el mismo ya sea que se empuje o se tire de él.

que actúan sobre el camión ($\mathbf{W}$, $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$) permanecen inalteradas si las personas empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas axiales iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ como se muestra en la figura 3.4a). De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza $\mathbf{P}_2$ se puede reemplazar por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción, pero que actúa en A en lugar de en B (figura 3.4b). Las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo con las reglas del capítulo 2 y, debido a que dichas fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra, el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.4a) es equivalente a que no existiera fuerza alguna (figura 3.4c).

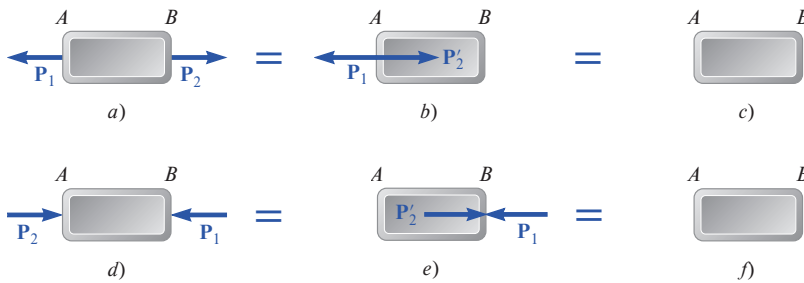


Figura 3.4 a)-c) Un conjunto de fuerzas equivalentes que actúa sobre la barra AB ; d)-f) otro conjunto de fuerzas equivalentes que actúa sobre la barra AB . Ambos conjuntos producen el mismo efecto, de equilibrio en este caso, pero diferentes fuerzas internas y deformaciones.

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que actúan sobre la barra AB , como se muestra en la figura 3.4d). La fuerza $\mathbf{P}_2$ puede ser reemplazada por una fuerza $\mathbf{P}'_2$ que tenga la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción, pero que actúe en B en lugar de en A (figura 3.4e). Entonces, las fuerzas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}'_2$ pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.4f). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en las figuras 3.4a) y 3.4d) son equivalentes. Sin embargo, es notable que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.4a) está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.4d) está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.1C Productos vectoriales

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles el producto vectorial de dos vectores.

El **producto vectorial** de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el vector $\mathbf{V}$ que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de $\mathbf{V}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.5a).
2. La magnitud de $\mathbf{V}$ es el producto de las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ por el seno del ángulo θ formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (cuya medida siempre deberá ser menor o igual que 180°); por tanto, se tiene

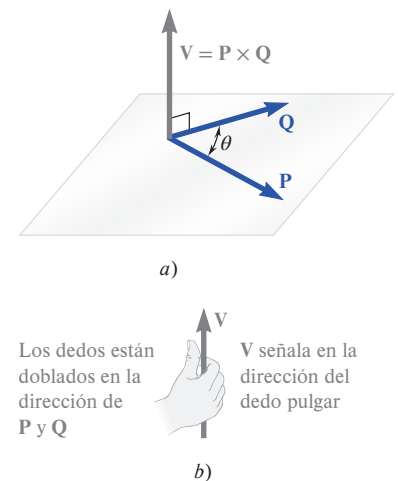


Figura 3.5 a) El producto vectorial $\mathbf{V}$ tiene la magnitud $PQ \sin \theta$ y es perpendicular al plano de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$; b) se puede utilizar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\mathbf{V}$.

Magnitud de un producto vectorial

$$V = PQ \sen \theta \quad (3.1)$$

3. La dirección de $\mathbf{V}$ se obtiene a partir de la **regla de la mano derecha**. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido de la rotación a través del ángulo θ que haría al vector $\mathbf{P}$ colineal con el vector $\mathbf{Q}$; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector $\mathbf{V}$ (figura 3.5b). Obsérvese que si $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ no tienen un punto de aplicación común, primero se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ —tomados en ese orden— forman una *triada a mano derecha*.[†]

Como se mencionó anteriormente, el vector $\mathbf{V}$ que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el *producto vectorial* de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, y se representa por la expresión matemática

Producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto cruz* de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180° , a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.6). Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ permanece inalterado si $\mathbf{Q}$ se reemplaza por un vector $\mathbf{Q}'$ que sea coplanar a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y tal que la línea que une a las partes terminales de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{Q}'$ sea paralela a $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (3.3)$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial $\mathbf{V}$ de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$, esto es, la condición que establece que $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ deben formar una triada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son conmutativos*; es decir, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ no es igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De hecho, se puede verificar que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ está representado por el vector $-\mathbf{V}$, que es igual y opuesto a $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

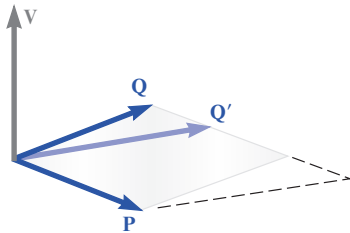


Figura 3.6 La magnitud del producto vectorial $\mathbf{V}$ es igual al área del paralelogramo formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Si se cambia $\mathbf{Q}$ por $\mathbf{Q}'$ de tal manera que el paralelogramo cambie de forma, pero $\mathbf{P}$ y el área permanezcan iguales, la magnitud de $\mathbf{V}$ permanecerá inalterada.

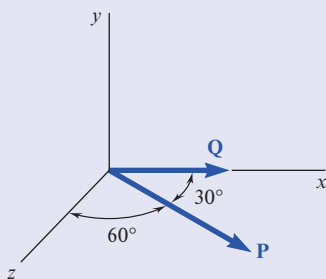


Figura 3.7 Dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ con un ángulo de 30° entre ellos.

Aplicación de concepto 3.1

Calcúlese el producto vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, cuando el vector $\mathbf{P}$ tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano xz , y forma un ángulo de 30° con el eje x , y el vector $\mathbf{Q}$ tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.7).

Solución

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector $\mathbf{V}$ debe estar a lo largo del eje y , dirigido hacia arriba, con la magnitud

$$V = PQ \sen \theta = (6)(4) \sen 30^\circ = 12 \blacksquare$$

[†] Se debe señalar que los ejes x , y y z utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha, y que los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ definidos en la sección 2.4A forman una triada ortogonal a mano derecha.

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Sin embargo, se puede demostrar que la propiedad *distributiva* se mantiene.

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (3.5)$$

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{S} \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (3.6)$$

3.1D Componentes rectangulares de productos vectoriales

Antes de volver a las fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos, observaremos una manera más conveniente de expresar productos vectoriales, por medio de componentes rectangulares. Para hacerlo, se utilizarán los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, que fueron definidos en el capítulo 2.

Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.8a). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que estos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser $\mathbf{k}$, puesto que los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son mutuamente perpendiculares y forman una triada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en la sección 3.1C, se concluye que el producto $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ debe ser igual a $-\mathbf{k}$ (figura 3.8b). Por último, se debe observar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Por tanto, podemos enumerar los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \quad (3.7)$$

Para determinar el signo del producto vectorial de dos vectores unitarios, simplemente se los debe ordenar en un círculo y leer en el orden de la multiplicación (figura 3.9). El producto será positivo si estos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y será negativo si estos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial $\mathbf{V}$ de dos vectores dados $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en sus componentes primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{V}$ se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como $P_x Q_y$. Recordando las identidades de la ecuación (3.7) después de factorizar a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial $\mathbf{V}$ están dadas por

Componentes rectangulares de un producto vectorial

$$\begin{array}{l} V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z = P_x Q_y - P_y Q_x \end{array} \quad (3.9)$$

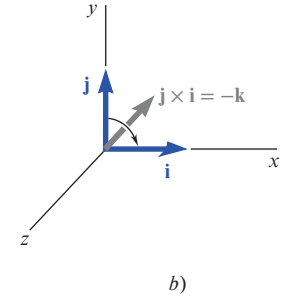
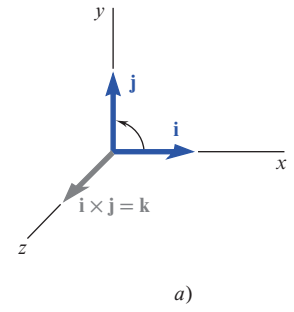


Figura 3.8 a) El producto vectorial de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es el vector unitario $\mathbf{k}$; b) el producto vectorial de los vectores unitarios $\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}$ es el vector unitario $-\mathbf{k}$.

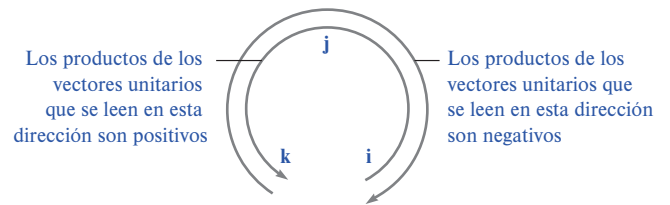


Figura 3.9 Ordene las tres letras $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Se puede utilizar el orden de las letras para los tres vectores unitarios en un producto vectorial para determinar su signo.

De regreso a la ecuación (3.8) se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{V}$ puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

Componentes rectangulares de un producto vectorial (forma determinante)

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

3.1E Momento de una fuerza con respecto a un punto

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.10a). Como se sabe, la fuerza $\mathbf{F}$ está representada por un vector que define su magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación A . La posición de A puede definirse de manera conveniente por medio del vector $\mathbf{r}$ que une al punto de referencia fijo O con A ; a este vector se lo conoce como el *vector de posición* de A . El vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$ definen el plano mostrado en la figura 3.10a).

El **momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O** se define como el producto vectorial de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$:

Momento de una fuerza con respecto a un punto O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.1C, el momento $\mathbf{M}_O$ debe ser perpendicular al plano que contiene el punto O y a la fuerza $\mathbf{F}$. El sentido de $\mathbf{M}_O$ está definido por el sentido de la rotación que haría al vector $\mathbf{r}$ colineal con el vector $\mathbf{F}$; un observador localizado en el extremo de $\mathbf{M}_O$ ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de $\mathbf{M}_O$ se logra por medio de una variación de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que $\mathbf{F}$ le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{M}_O$; de esta manera, su dedo pulgar indicará el sentido del momento $\mathbf{M}_O$ (figura 3.10b).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$, se encuentra que la magnitud del momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O está dada por

Magnitud del momento de una fuerza

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

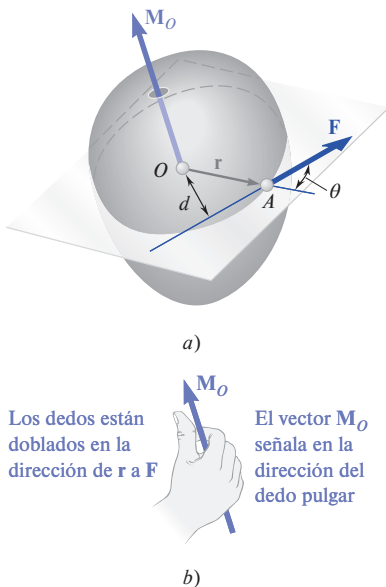
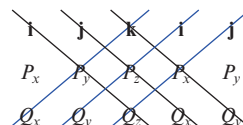


Figura 3.10 Momento de una fuerza con respecto a un punto. a) El momento $\mathbf{M}_O$ es el producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}$ y de la fuerza $\mathbf{F}$; b) la regla de la mano derecha indica el sentido de $\mathbf{M}_O$.

[†] Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea azul se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$ (véase figura 3.10). De manera experimental, la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende tanto de la distancia de $\mathbf{F}$ a dicho eje como de la magnitud de $\mathbf{F}$. Por ejemplo, la respiración de un niño puede ejercer fuerza suficiente para hacer girar un molinillo de juguete (figura 3.11a), pero una turbina eólica necesita la fuerza de un viento fuerte para hacer girar las aspas y generar energía eléctrica (figura 3.11b). Sin embargo, la distancia perpendicular entre el punto de rotación y la línea de acción de la fuerza, que se suele llamar *brazo de momento*, es igual de importante. Si se quiere aplicar un momento pequeño para girar una tuerca de una tubería sin romperla, se puede utilizar una llave inglesa pequeña que produzca un brazo de momento corto (figura 3.11c). Pero si se necesita un momento mayor se puede utilizar una llave más grande con un brazo de momento más largo (figura 3.11d). Por tanto,

la magnitud de M_O mide la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de M_O .

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N·m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb·pie o en lb·pulg.

Se puede observar que, a pesar de que el momento M_O de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento M_O de una fuerza $\mathbf{F}$ no caracteriza a la posición del punto de aplicación de $\mathbf{F}$.

Sin embargo, como se verá a continuación, el momento M_O de una fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de $\mathbf{F}$* . Además, la línea de acción de $\mathbf{F}$ debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento M_O . Su distancia d medida desde O debe ser igual al cociente de M_O/F de las magnitudes de M_O y F , esto es, debe ser igual a M_O/F . El sentido de M_O determina si la línea de acción de $\mathbf{F}$ debe trazarse de un lado o del otro del punto O .

Recuérdese la sección 3.1B, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ son equivalentes (esto es, produce el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma:

Dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ son equivalentes si y solo si son iguales (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) y tienen momentos iguales con respecto a un punto O .

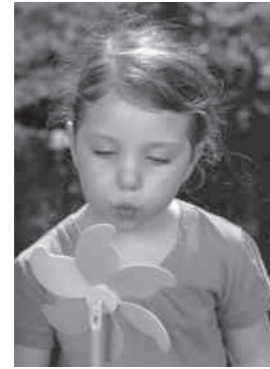
Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ sean equivalentes son

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad M_O = M'_O \quad (3.13)$$

Debe señalarse que si las relaciones de las ecuaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O , también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones en la estática tratan con estructuras bidimensionales; es decir, estructuras cuyo espesor es insignificante en comparación con su longitud y su anchura. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.

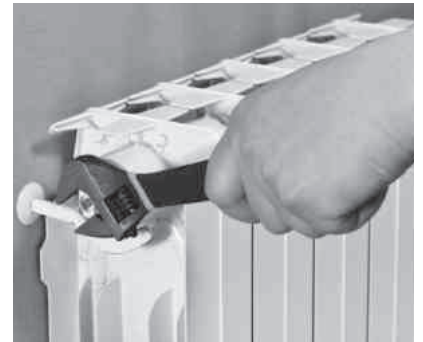
Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza $\mathbf{F}$ en el plano de la placa rígida (figura 3.12). El momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O



a) Poca fuerza



b) Mucha fuerza



c) Brazo de momento corto



d) Brazo de momento largo

Figura 3.11 a), b) El momento de una fuerza depende de la magnitud de la misma; c), d) también depende de la longitud del brazo de momento.

a) ©darko64/123RF; b) © Connect Images/Getty Images; c) © Valery Voenny/Alamy Stock Photo; d) © Monty Rakusen/Cultura/Getty Images

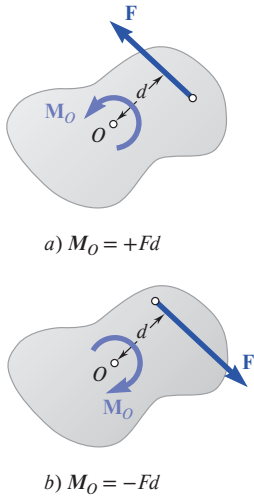


Figura 3.12 a) Un momento que tiende a producir una rotación contraria al sentido de las manecillas del reloj es positivo; b) un momento que tiende a producir una rotación en el sentido de las manecillas del reloj es negativo.

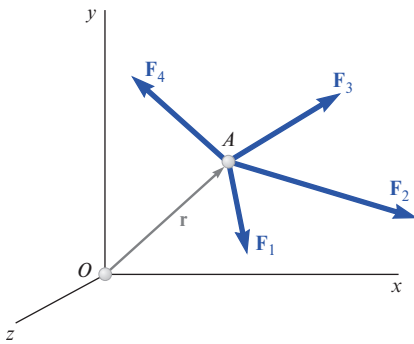


Figura 3.13 El teorema de Varignon plantea que el momento con respecto a un punto O de la resultante de estas cuatro fuerzas es igual a la suma de los momentos con respecto al punto O de las fuerzas individuales.

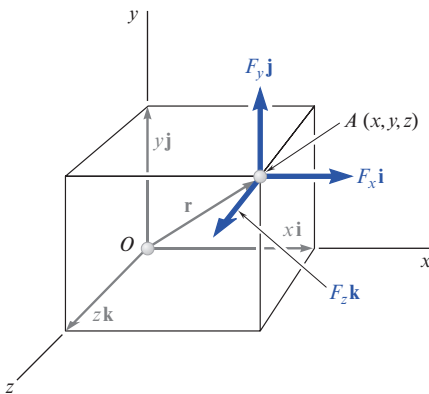


Figura 3.14 El momento $\mathbf{M}_O$ con respecto al punto O de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto A es el producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$, los cuales se pueden expresar en componentes rectangulares.

seleccionado en el plano de la figura está representado por el vector $\mathbf{M}_O$ de magnitud Fd , que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.12a) el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia *afuera* de la página, mientras que en la figura 3.12b) este apunta hacia *adentro* de ella. Como se observa en la figura, en el primer caso, $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O en la figura 3.12a) como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj $\curvearrowright$, y en la figura 3.12b) como en sentido del movimiento de las manecillas del reloj $\curvearrowleft$.

Puesto que el momento de la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, solo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento $\mathbf{F}$ con respecto a O. Esto se puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector $\mathbf{M}_O$ apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de la página.

3.1F Componentes rectangulares del momento de una fuerza

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias *fuerzas concurrentes*. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ se aplican en el mismo punto A (figura 3.13) y si se representa por $\mathbf{r}$ al vector de posición A, a partir de la ecuación (3.5) se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Esto es,

el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O.

Esta propiedad la estableció el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes del desarrollo del álgebra vectorial, por lo que se la conoce como **teorema de Varignon**.

La relación en la ecuación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza $\mathbf{F}$ será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a $\mathbf{F}$ en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema modelo 3.3).

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x, y y z . Por ejemplo, considere el momento $\mathbf{M}_O$ con respecto a O de una fuerza $\mathbf{F}$ con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas x, y y z (figura 3.14). Se observa que las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ son iguales, respectivamente, a las coordenadas x, y y z del punto A; $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ se escriben

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Al sustituir a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$ a partir de las ecuaciones (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

y recordar las ecuaciones (3.8) y (3.9), se puede escribir el momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O de la siguiente forma:

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

donde las componentes escalares M_x , M_y y M_z están definidas por las relaciones

Componentes rectangulares de momento

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como se verá en la sección 3.2C, las componentes escalares M_x , M_y y M_z del momento $\mathbf{M}_O$ miden la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Sustituyendo la ecuación (3.18) en la ecuación (3.17) también puede escribirse $\mathbf{M}_O$ en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular el momento $\mathbf{M}_B$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 3.15) se debe reemplazar el vector de posición $\mathbf{r}$ en la ecuación (3.11) por un vector trazado desde B hasta A . Este vector es el de *posición de A relativo a B* y se representa por $\mathbf{r}_{A/B}$. Se observa que $\mathbf{r}_{A/B}$ se puede obtener si se resta $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$; por tanto, se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

o bien, en forma de determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de problemas en dos dimensiones se puede suponer sin perder generalidad que la fuerza $\mathbf{F}$ está contenida en el plano xy (figura 3.16). Al hacer $z = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.19), se obtiene

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Con esto se verifica que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y está completamente definido por el escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_O indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia afuera del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar al cuerpo con respecto a O en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y un valor negativo indica que el vector $\mathbf{M}_O$ apunta hacia adentro del plano del papel (la fuerza $\mathbf{F}$ tiende a hacer rotar el cuerpo con respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj).

Para calcular el momento con respecto a $B(x_B, y_B)$ de una fuerza contenida en el plano xy , aplicada en el punto $A(x_A, y_A)$ (figura 3.17), se hace $z_{A/B} = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.21) y se comprueba que el vector $\mathbf{M}_B$ es perpendicular al plano xy y está definido en magnitud y sentido por su componente escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

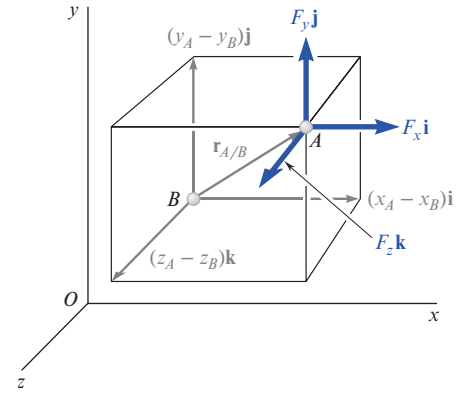


Figura 3.15 El momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en el punto A es el producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$ y la fuerza $\mathbf{F}$.

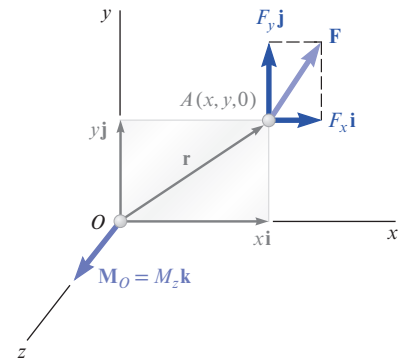


Figura 3.16 En un problema en dos dimensiones, el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A en el plano xy se reduce a la componente z del producto vectorial de $\mathbf{r}$ con $\mathbf{F}$.

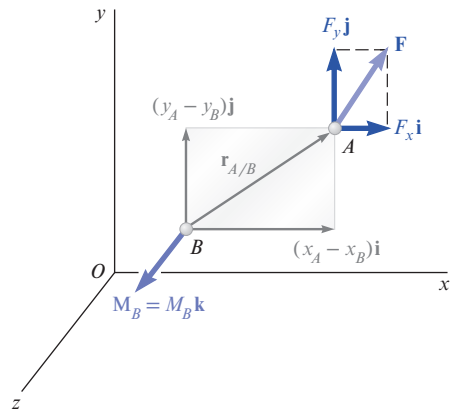


Figura 3.17 En un problema en dos dimensiones, el momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A en el plano xy se reduce al componente z del producto vectorial de $\mathbf{r}_{A/B}$ con $\mathbf{F}$.

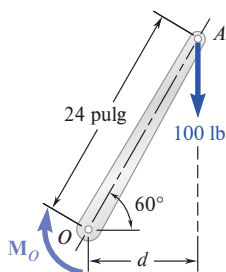
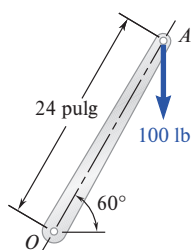


Figura 1 Cálculo del momento de la fuerza de 100 lb respecto a O utilizando la distancia perpendicular d .

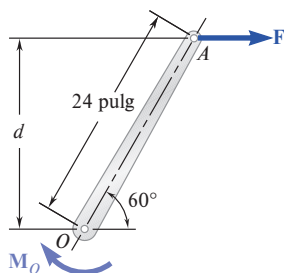


Figura 2 Cálculo de la fuerza horizontal en A que crea un momento igual con respecto a O .

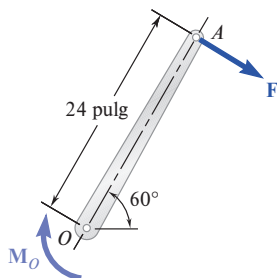


Figura 3 Cálculo de la fuerza mínima en A que crea un momento igual con respecto a O .

Problema modelo 3.1

Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto O . Determine: *a*) el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O ; *b*) la fuerza horizontal aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *c*) la fuerza mínima aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *d*) qué tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a O , y *e*) si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original.

ESTRATEGIA: Los cálculos necesarios para todas las variaciones involucradas en la ecuación básica de definición de momento, $M_O = Fd$.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Momento con respecto a O . La distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb (figura 1) es

$$d = (24 \text{ pulg}) \cos 60^\circ = 12 \text{ pulg}$$

La magnitud del momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O es igual a

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ pulg}) = 1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$$

Como la fuerza tiende a hacer rotar la palanca respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj, el momento será representado por un vector $\mathbf{M}_O$ perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia *adentro* del plano del papel. Este hecho se expresa escribiendo

$$\mathbf{M}_O = 1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg} \odot \quad \blacktriangleleft$$

b) Fuerza horizontal. En este caso se tiene que (figura 2)

$$d = (24 \text{ pulg}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ pulg}$$

Como el momento con respecto a O debe ser igual a $1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$, se escribe

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg} &= F(20.8 \text{ pulg}) \\ F &= 57.7 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = 57.7 \text{ lb} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

c) Fuerza mínima. Como $M_O = Fd$, el mínimo valor de F se obtiene cuando d es máximo. Se selecciona la fuerza perpendicular a OA y se observa que $d = 24 \text{ pulg}$ (figura 3); entonces

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg} &= F(24 \text{ pulg}) \\ F &= 50 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = 50 \text{ lb} \nearrow 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$

d) Fuerza vertical de 240 lb. En este caso (figura 4), $M_O = Fd$ proporciona

$$1\,200 \text{ lb}\cdot\text{pulg} = (240 \text{ lb})d \quad d = 5 \text{ pulg}$$

(continúa)

pero

$$OB \cos 60^\circ = d$$

por tanto

$$OB = 10 \text{ pulg} \quad \blacktriangleleft$$

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos b), c) y d) es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas producen el mismo momento con respecto a O , sus componentes en x y y son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.

REVISAR y PENSAR: Las distintas combinaciones de fuerza y de brazo de momento pueden generar momentos equivalentes, pero el sistema de fuerzas y momento produce un efecto general distinto en cada caso.

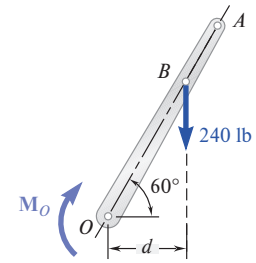


Figura 4 Posición de la fuerza vertical de 240 lb que crea un momento igual con respecto a O .

Problema modelo 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B .

ESTRATEGIA: Se pueden descomponer la fuerza y el vector de posición de B a A en sus componentes rectangulares y usar un enfoque vectorial para completar la solución.

MODELAR y ANALIZAR: El momento $\mathbf{M}_B$ de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a B se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde B hasta A (figura 1). Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a $\mathbf{F}$ en sus componentes rectangulares, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Recordando las relaciones en la ecuación (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.1D), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright \quad \blacktriangleleft$$

El momento $\mathbf{M}_B$ es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* de la página.

REVISAR y PENSAR: Asimismo, se puede utilizar un enfoque escalar para resolver este problema y emplear las componentes de la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$. Si se utiliza la regla de la mano derecha para asignar los signos, se obtiene

$$+\curvearrowright M_B = \Sigma M_B = \Sigma Fd = -(400 \text{ N})(0.16 \text{ m}) - (693 \text{ N})(0.2 \text{ m}) = -202.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N}\cdot\text{m} \quad \curvearrowright \quad \blacktriangleleft$$

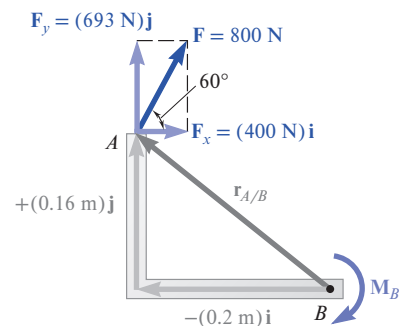
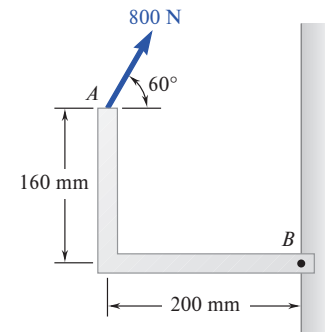


Figura 1 El momento $\mathbf{M}_B$ se determina a partir del producto vectorial del vector de posición $\mathbf{r}_{A/B}$ y el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

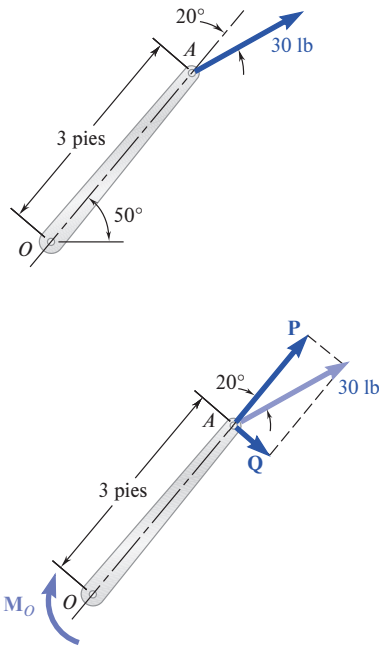


Figura 1 La fuerza de 30 lb en A se descompone en las componentes **P** y **Q** para simplificar el cálculo del momento M_O .

Problema modelo 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 pies, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza respecto a O .

ESTRATEGIA: Descomponer la fuerza en componentes perpendiculares y paralelos al eje de la palanca facilita enormemente el cálculo del momento.

MODELAR y ANALIZAR: La fuerza se reemplaza por dos componentes: una componente **P** en la dirección de OA y otra componente **Q** perpendicular a OA (figura 1). Dado que O se encuentra en la línea de acción de **P**, el momento de **P** con respecto a O es igual a cero. Por tanto, el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de **Q**, que es en sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa con un escalar negativo.

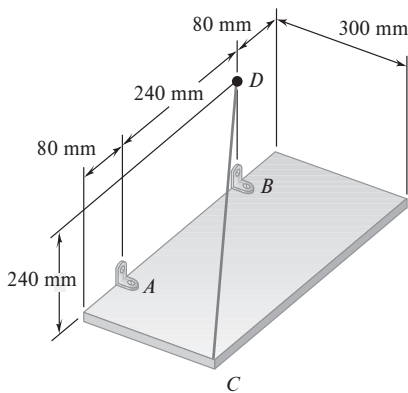
$$Q = (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb}$$

$$M_O = -Q(3 \text{ pies}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ pies}) = -30.8 \text{ lb}\cdot\text{pies}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento M_O apunta hacia *adentro* de la página. Así, se escribe

$$M_O = 30.8 \text{ lb}\cdot\text{pie} \quad \curvearrowleft$$

REVISAR y PENSAR: Siempre se deben buscar maneras de simplificar el trabajo para reducir la cantidad de cálculos.



Problema modelo 3.4

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Si se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C.

ESTRATEGIA: Para hallar la solución se deben descomponer la tensión en el alambre y el vector de posición de A a C en componentes rectangulares. Se deberá abordar con vectores unitarios para determinar las componentes de fuerza.

MODELAR y ANALIZAR: El momento M_A de la fuerza **F** ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A se obtiene a partir del producto vectorial

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \quad (1)$$

donde $\mathbf{r}_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C,

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

y **F** es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD (figura 1). Al introducir el vector unitario $\lambda = \overrightarrow{CD}/CD$ se puede expresar **F** como

$$\mathbf{F} = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \quad (3)$$

(continúa)

Al descomponer al vector $\overrightarrow{CD}$ en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.50 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo $\mathbf{r}_{C/A}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4), y recordando las relaciones en la ecuación (3.7) de la sección 3.1D, se obtiene (figura 2)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA: Como se mencionó en la sección 3.1F, el momento $\mathbf{M}_A$ puede ser expresado en forma de determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

REVISAR y PENSAR: Al trasladar los ejes x , y y z al punto A y aplicar la regla de la mano derecha sobre ellos, se puede verificar fácilmente que los signos de los componentes del momento $\mathbf{M}_A$ debido a la fuerza $\mathbf{F}$ son correctos.

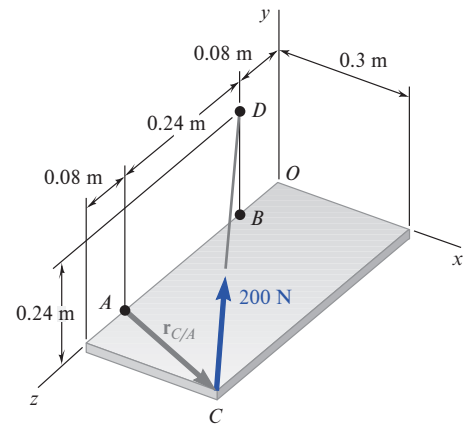


Figura 1 El momento $\mathbf{M}_A$ se calcula a partir del vector de posición $\mathbf{r}_{C/A}$ y el vector de fuerza $\mathbf{F}$.

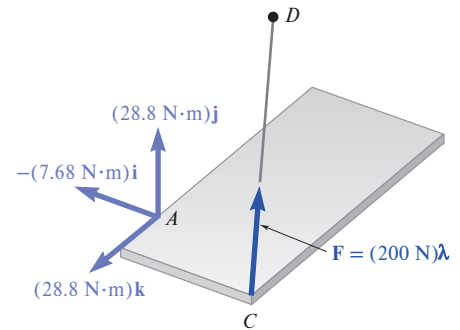


Figura 2 Componentes del momento $\mathbf{M}_A$ aplicadas en A .

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con respecto a un punto*, y

también para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una línea.

El momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto al punto O de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición que va desde O hasta cualquier punto sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$. Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento $\mathbf{M}_O$ es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de $\mathbf{M}_O$.

1. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza en dos dimensiones. Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de $\mathbf{F}$ y la *distancia perpendicular* d desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$ (problema modelo 3.1).

b) Expresar $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (problema modelo 3.2).

c) Descomponer $\mathbf{F}$ en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}$, respectivamente. Solo la componente perpendicular contribuye al momento de $\mathbf{F}$ (problema modelo 3.3).

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza (problema modelo 3.2).

2. Cálculo del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ en tres dimensiones. Con el método del problema modelo 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar el vector de posición $\mathbf{r}$ que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. Determinación de la distancia perpendicular d desde un punto A hasta una línea dada. Primero se supone que la fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a A formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A . Por último, se sustituyen los valores de F y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para d .

Problemas*

3.1 Una válvula de pie para un sistema neumático está articulado en B . Si se sabe que $\alpha = 28^\circ$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B ; para ello, descomponga la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.2 Una válvula de pie para un sistema neumático está articulada en B . Si se sabe que $\alpha = 28^\circ$, determine el momento de la fuerza de 16 N alrededor del punto B ; para ello, descomponga la fuerza en sus componentes a lo largo de ABC y en una dirección perpendicular a ABC .

3.3 Se sabe que es necesaria una fuerza vertical de 200 lb para remover el clavo que está en C de la tabla. Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine *a*) el momento respecto de B de la fuerza ejercida sobre el clavo, *b*) la magnitud de la fuerza P que genera el mismo momento respecto de B si $\alpha = 10^\circ$ y *c*) la fuerza P mínima que genera el mismo momento respecto de B .

3.4 Se aplica una fuerza de 300 N en A como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N respecto de D , *b*) la fuerza mínima aplicada en B que crea el mismo momento respecto de D .

3.5 Se aplica una fuerza de 300 N en A como se muestra en la figura. Determine *a*) el momento de la fuerza de 300 N respecto de D , *b*) la magnitud y sentido de la fuerza horizontal aplicada en C que crea el mismo momento respecto de D , *c*) la fuerza mínima aplicada en C que crea el mismo momento respecto de D .

3.6 Se aplica una fuerza P de 8 lb a una palanca de cambios. Determine el momento de P con respecto a B cuando α es igual a 25° .

3.7 Para la palanca de cambios mostrada en la figura, determine la magnitud y la dirección de la fuerza más pequeña P que tiene un momento de 210 lb-pulg en el sentido horario alrededor de B .

3.8 Se aplica una fuerza P de 11 lb a una palanca de cambios. El momento de P alrededor de B es en el sentido horario y tiene una magnitud de 250 lb-pulg. Determine el valor de α .

3.9 Una varilla AB se sostiene en su lugar con un cordón AC . Si se sabe que la tensión en el cordón es 1 350 N y que $c = 360$ mm, determine el

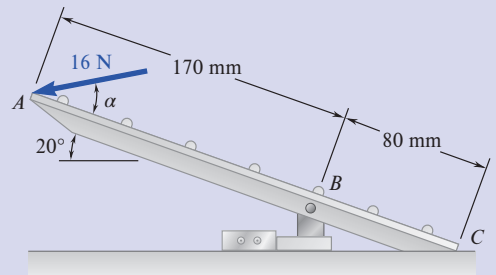


Figura P3.1 y P3.2

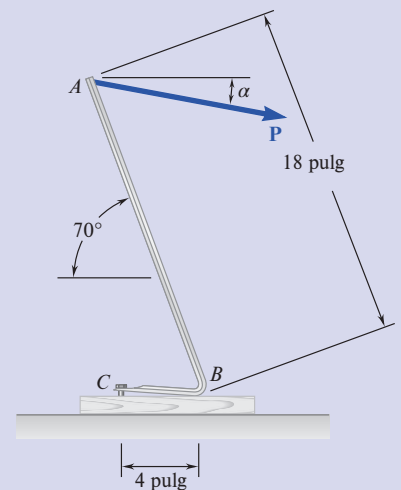


Figura P3.3

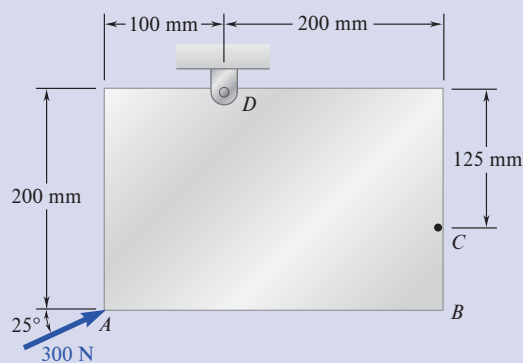


Figura P3.4 y P3.5

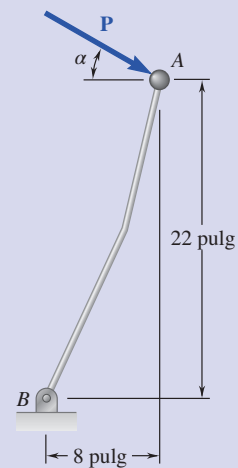


Figura P3.6, P3.7 y P3.8

* Las respuestas a todos los problemas cuyo número está en tipo recto (como en 3.1) se presentan al final del libro. No se dan las respuestas a los problemas con números en itálicas (como en 3.3).

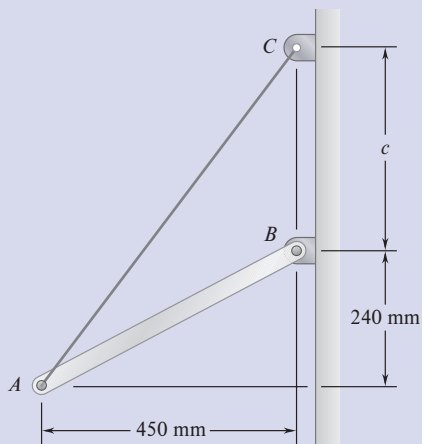


Figura P3.9 y P3.10

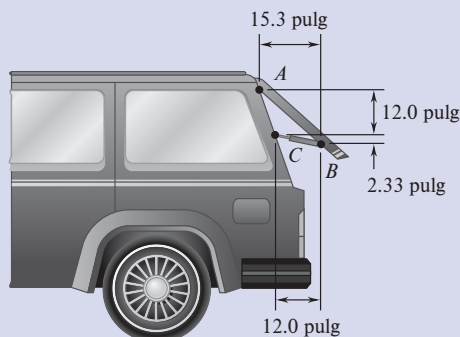


Figura P3.11

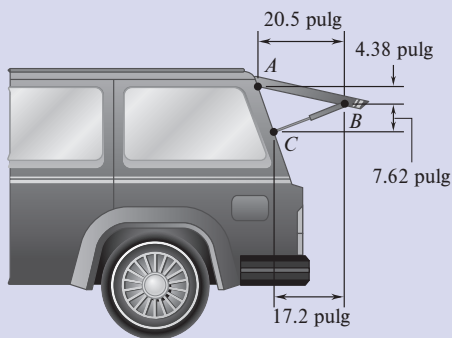
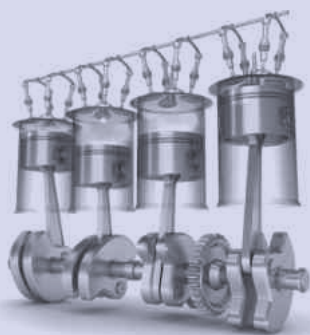


Figura P3.12



Fotografía P3.13 y P3.14

©Alex Mit/Shutterstock

momento respecto de B de la fuerza ejercida por el cordón en el punto A descomponiendo dicha fuerza en sus componentes vertical y horizontal aplicadas en a) el punto A , b) el punto C .

3.10 Una varilla AB se sostiene en su lugar con un cordón AC . Si se sabe que $c = 840$ mm y que el momento respecto de B de la fuerza ejercida por el cordón en el punto A es 756 N·m, determine la tensión en el cordón.

3.11 y 3.12 La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador hidráulico BC . Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza de 125 lb cuya línea de acción pasa por el soporte de rótula en B , determine el momento de la fuerza respecto de A .

3.13 y 3.14 Los pistones de un motor de automóvil se ilustran en la fotografía P3.13 y P3.14, y uno de estos pistones se modela de la manera mostrada en las figuras P3.13 y P3.14. Se sabe que la varilla de conexión AB ejerce una fuerza de 2.5 kN sobre la manivela BC dirigida hacia abajo y a la izquierda a lo largo de la línea central de AB . Determine el momento de la fuerza respecto de C .

3.15 Forme el producto vectorial $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ y use el resultado obtenido para demostrar la identidad

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

3.16 Los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo cuando a) $\mathbf{P} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = 8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, b) $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

3.17 Un plano contiene los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. Determine el vector unitario normal al plano cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son iguales, respectivamente, a) $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $9\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, b) $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $-5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

3.18 Una recta pasa por los puntos $(-4$ m, -3 m) y $(2$ m, 7 m). Determine la distancia perpendicular d desde la recta al origen O del sistema de coordenadas.

3.19 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que actúa en un punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

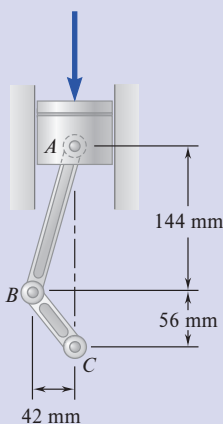


Figura P3.13

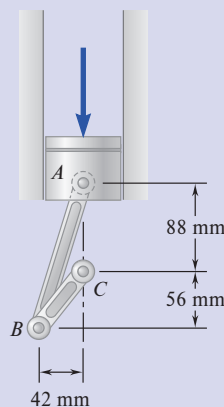


Figura P3.14

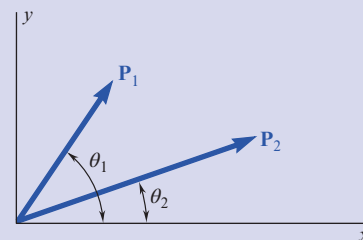


Figura P3.15

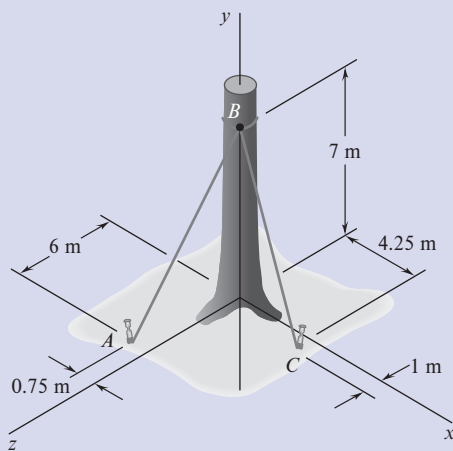


Figura P3.21

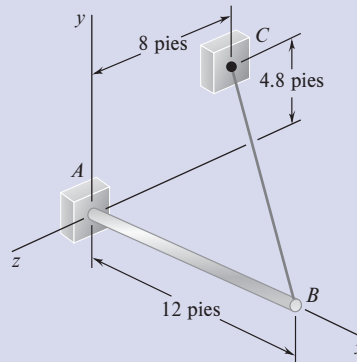


Figura P3.22

3.20 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ que actúa en un punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

3.21 Antes de que se tale un árbol se conectan los cables AB y BC como se muestra en la figura. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida sobre el árbol por los cables en B .

3.22 El aguilon AB de 12 pies tiene un extremo fijo A . Un cable de acero se estira desde el extremo libre B del aguilon hasta el punto C ubicado en la pared vertical. Si la tensión en el cable es de 380 lb, determine el momento respecto de A de la fuerza ejercida por el cable en B .

3.23 Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC , como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza respecto de A .

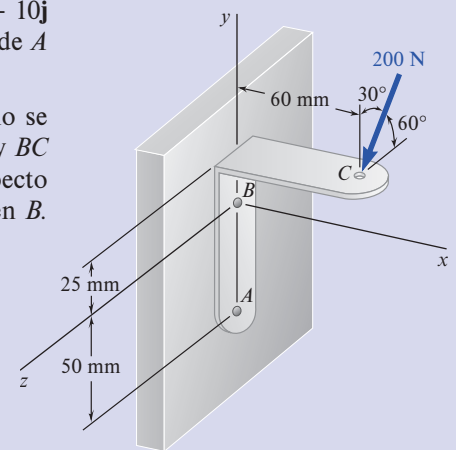


Figura P3.23

3.24 Un jugador de básquetbol jala el aro de una canasta mientras completa una "clavada", como se muestra en la fotografía P3.24. Para evitar que el tablero de cristal se rompa durante esta maniobra, la parte trasera del aro puede girar alrededor de una varilla de soporte, y el grado de rotación se controla mediante resortes. Los resortes se pueden ajustar para proporcionar la resistencia adecuada a los momentos ejercidos sobre la varilla durante las "clavadas". En la figura P3.24 se modela el aro para este caso particular. Si se supone que el jugador ejerce una fuerza de 700 N, como se muestra, determine el momento de esta fuerza con respecto al punto B , ubicado en un extremo de la varilla de soporte.

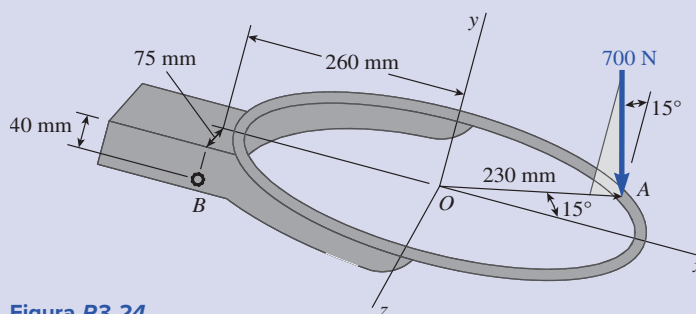


Figura P3.24



Fotografía P3.24

©Purestock/SuperStock

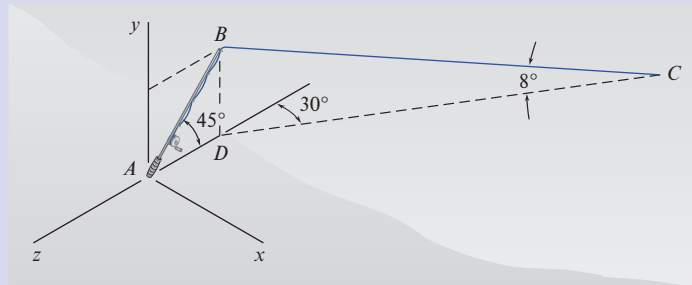


Figura P3.25

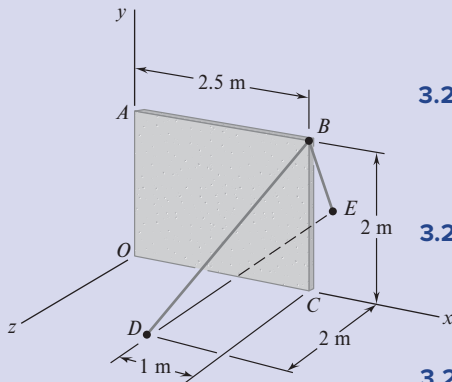


Figura P3.26

- 3.25** Una caña de pescar AB de 6 pies se ancla de manera segura en la arena de una playa. Después de que un pez pica en el anzuelo, la fuerza resultante en la línea es de 6 lb. Determine el momento respecto de A de la fuerza ejercida por la línea en B .
- 3.26** Una sección de pared hecha con concreto precolado se sostiene temporalmente mediante dos cables como se muestra en la figura P3.26. Si se sabe que la tensión en el cable BD es de 900 N, determine el momento respecto del punto O de la fuerza ejercida por el cable en B .
- 3.27** En el problema 3.22, determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta el cable BC .
- 3.28** En el problema 3.23, determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta la línea de acción de la fuerza de 200 N.
- 3.29** En el problema 3.24, determine la distancia perpendicular desde el punto B hasta la línea de acción de la fuerza de 700 N.
- 3.30** En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta una línea que pase a través de los puntos B y C .

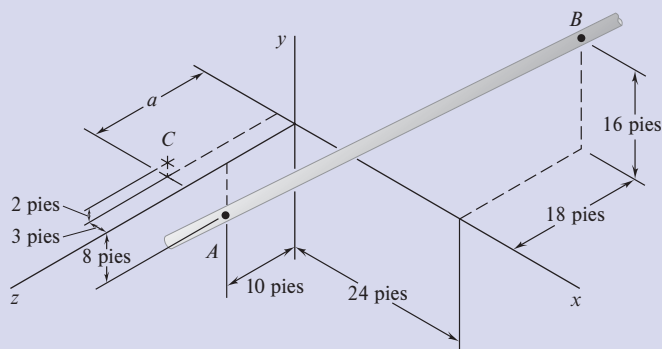


Figura P3.34

- 3.31** En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta una línea que pase a través de los puntos B y C .
- 3.32** En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el cable BD .
- 3.33** En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta el cable BD .
- 3.34** Determine el valor de a que reduce al mínimo la distancia perpendicular desde el punto C hasta la sección de tubería que pasa por los puntos A y B .

3.2 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

La idea del momento con respecto a un punto puede ampliarse con el concepto útil del momento con respecto al eje. Sin embargo, primero se debe presentar otra herramienta de la matemática vectorial. Se ha visto que el producto vectorial multiplica dos vectores y genera un nuevo vector. Aquí se examinará el producto escalar, que multiplica dos vectores y genera una cantidad escalar.

3.2A Productos escalares

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se define como el producto de las magnitudes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y el coseno del ángulo θ formado por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.18). El producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Entonces, se escribe

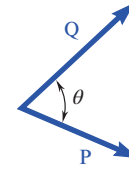


Figura 3.18 Dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y el ángulo θ entre ellos.

Producto escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

Obsérvese que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ también se conoce como el *producto punto* de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$.

A partir de su propia definición se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*; esto es, que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

El producto escalar también es *distributivo*, como lo demuestra la ecuación

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$

En lo concerniente a la propiedad asociativa se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho, $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede expresarse en términos de sus componentes rectangulares. Descomponiendo $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ y $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a un producto escalar

Producto escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.28)$$

En el caso particular cuando $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son iguales se observa que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.29)$$

Aplicaciones del producto escalar

- Ángulo formado por dos vectores dados.** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en las ecuaciones (3.24) y (3.28) y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Despejando $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.30)$$

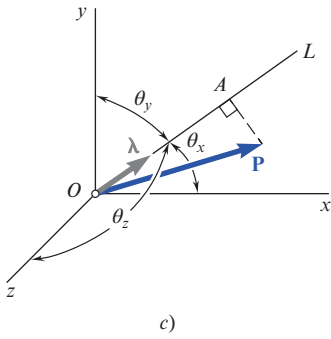
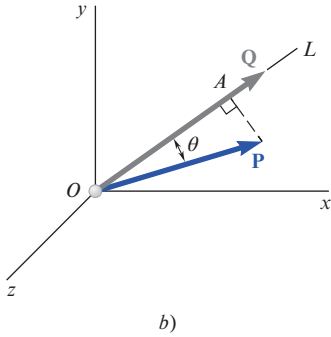
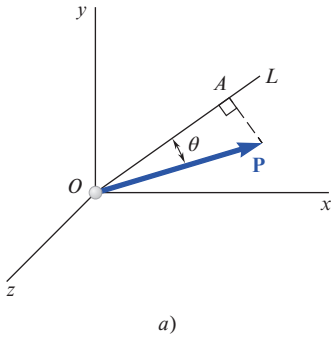


Figura 3.19 a) La proyección del vector $\mathbf{P}$ con respecto al ángulo θ sobre la línea OL ; b) la proyección de $\mathbf{P}$ y el vector $\mathbf{Q}$ sobre OL ; c) la proyección de $\mathbf{P}$, el vector unitario λ sobre OL y los ángulos de OL con los ejes de coordenadas.

2. Proyección de un vector sobre un eje dado. Considérese un vector $\mathbf{P}$ que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.19a). La *proyección de $\mathbf{P}$ sobre el eje OL* se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.31)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto a la longitud del segmento OA ; esta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL , esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si $\mathbf{P}$ y OL forman un ángulo recto, la proyección de $\mathbf{P}$ sobre OL es cero.

Considere ahora un vector $\mathbf{Q}$ dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 3.19b). El producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL}Q \quad (3.32)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.33)$$

En el caso particular cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario λ (figura 3.19c), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.34)$$

Recordar de la sección 2.4A que las componentes de λ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL . Al descomponer $\mathbf{P}$ y λ en sus componentes rectangulares, la proyección de $\mathbf{P}$ sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.35)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

3.2B Triples productos mixtos

Se han mostrado las dos maneras de multiplicar dos vectores: el producto vectorial y el producto escalar. Se define al **triple producto mixto** de tres vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ como la expresión escalar

Triple producto mixto

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.36)$$

La misma se obtiene formando el producto escalar de $\mathbf{S}$ con el producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. [En el capítulo 15 se presentará otro tipo de triple producto: el triple producto vectorial, $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.]

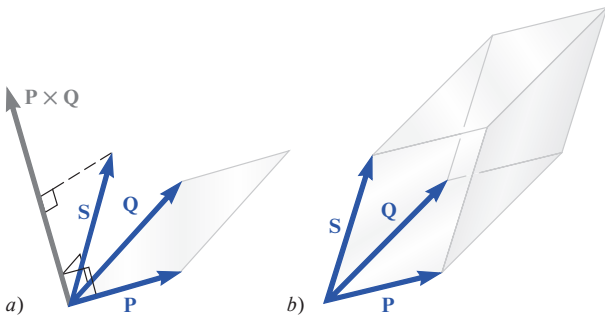


Figura 3.20 a) El triple producto mixto es igual a la magnitud del producto cruz de dos vectores multiplicados por la proyección del tercer vector con respecto a ese producto cruz; b) el resultado es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

Al triple producto escalar de $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.20a). En primer lugar, recuerde de la sección 3.1C que el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$, y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$. Por otro lado, la ecuación (3.32) indica que el producto escalar de $\mathbf{S}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ se puede obtener multiplicando la magnitud de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$) por la proyección de $\mathbf{S}$ sobre el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ (esto es, por la proyección de $\mathbf{S}$ sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el triple producto escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.20b). Se debe señalar que el signo del triple producto escalar será positivo si $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ forman una triada a mano derecha, y será negativo si estos forman una triada a mano izquierda [esto es, $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ será

negativo si se observa, desde el extremo terminal de $\mathbf{S}$, que la rotación que hace a $\mathbf{P}$ colineal con $\mathbf{Q}$ va en el sentido de las manecillas del reloj]. El triple producto mixto será igual a cero si $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son coplanares.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis triples productos escalares que se pueden formar con $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S})\end{aligned}\quad (3.37)$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.21), se observa que el signo del producto triple mixto permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que estos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.37) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el triple producto escalar de $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se puede definir tanto con $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ como con $(\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Q}$.

El triple producto escalar de los vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ con $\mathbf{V}$ y con la fórmula (3.28) para expresar el producto escalar de $\mathbf{S}$ y $\mathbf{V}$, se escribe

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Si se sustituyen las componentes de $\mathbf{V}$ a partir de las relaciones en la ecuación (3.9) se obtiene

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \quad (3.38)$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

Triple producto mixto, forma de determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

Aplicando las reglas que gobiernan la permutación de renglones en un determinante pueden verificarse fácilmente las relaciones en la ecuación (3.37) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.2C Momento de una fuerza con respecto a un eje dado

Ahora que se cuenta con las herramientas matemáticas necesarias se puede presentar el concepto de momento de una fuerza con respecto a un eje. Considérese nuevamente la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento $\mathbf{M}_O$ de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.22). Sea OL un eje a través de O ;

el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto a OL se define como la proyección OC del momento $\mathbf{M}_O$ sobre el eje OL .

Representando al vector unitario a lo largo de OL como λ y recordando las expresiones (3.34) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$, podemos expresar M_{OL} como

Momento con respecto a un eje a través del origen

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.40)$$

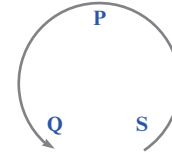


Figura 3.21 Orden contrario al sentido de las manecillas del reloj para determinar el signo del triple producto mixto de tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{S}$.

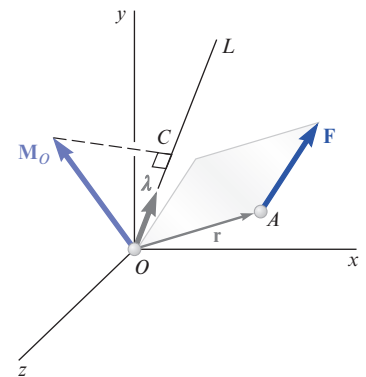


Figura 3.22 El momento de $\mathbf{M}_{OL}$ de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto al eje OL es la proyección sobre OL del momento $\mathbf{M}_O$. El cálculo involucra al vector unitario λ sobre OL y el vector de posición desde O hasta A , el punto sobre el que actúa la fuerza $\mathbf{F}$.

Esto demuestra que el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el triple producto escalar de $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$. Expresando M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL

x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de $\mathbf{F}$

F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

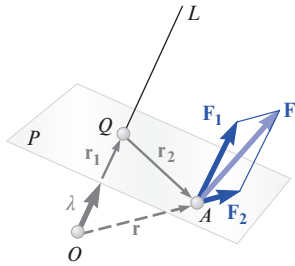


Figura 3.23 Al descomponer la fuerza $\mathbf{F}$ en componentes paralelas al eje OL y en un plano perpendicular al mismo se demuestra que el momento $\mathbf{M}_{OL}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a OL mide la tendencia de $\mathbf{F}$ a rotar el cuerpo rígido alrededor del eje.

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a $\mathbf{F}$ en dos componentes rectangulares $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con $\mathbf{F}_1$ paralela a OL y $\mathbf{F}_2$ contenida en un plano P perpendicular a OL (figura 3.23). En forma similar, descomponiendo a $\mathbf{r}$ en dos componentes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, y sustituyendo a $\mathbf{F}$ y a $\mathbf{r}$ en la ecuación (3.40), se escribe

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término todos los triples productos mixtos son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.2B). Por tanto, esta expresión se reduce a

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.42)$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y representa el momento de la componente $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{F}$ con respecto al punto Q donde OL interseca a P . Por tanto, el escalar M_{OL} , el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de $\mathbf{F}_2$ a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor del eje fijo OL . La otra componente $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de OL porque $\mathbf{F}_1$ y OL son paralelas. Por tanto, se llega a la conclusión que

el momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza $\mathbf{F}$ de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo OL .

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje se concluye que el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de dicho eje. Al sustituir $\boldsymbol{\lambda}$ de manera sucesiva en la ecuación (3.40) por cada uno de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se obtienen expresiones para los momentos de $\mathbf{F}$ con respecto a los ejes coordenados. Las mismas son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas con anterioridad para las componentes del momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

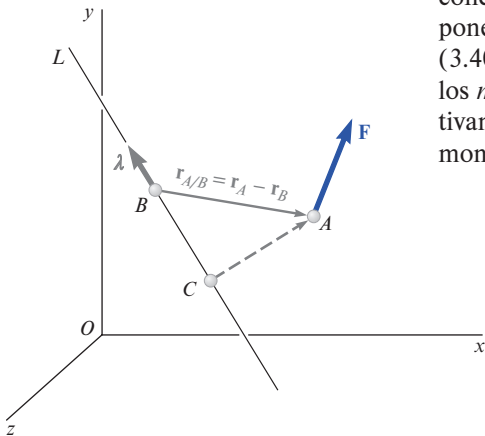


Figura 3.24 El momento de una fuerza con respecto al eje o recta L puede hallarse al calcular el triple producto mixto sobre un punto B de la recta. La elección de B es arbitraria, ya que utilizar cualquier otro punto, como puede ser C , generará el mismo resultado.

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x, y y z , los momentos M_x, M_y y M_z de $\mathbf{F}$ con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de $\mathbf{F}$ a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x, y y z .

En general, el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen se obtiene seleccionando un punto arbitrario B sobre dicho eje (figura 3.24) y determinando la proyección sobre el eje

BL del momento $\mathbf{M}_B$ de $\mathbf{F}$ con respecto a B . La ecuación para esta proyección se presenta a continuación.

Momento en relación a un eje arbitrario

$$M_{BL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.43)$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde B hasta A . Expresando a M_{BL} en forma de determinante se tiene

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.44)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje BL

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de la fuerza $\mathbf{F}$

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Sin embargo, debido a que los vectores λ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores λ , $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y $\mathbf{F}$ es igual a cero, al igual que el triple producto mixto de dichos vectores (sección 3.2B). Entonces, la expresión obtenida para M_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a M_{BL} . De manera adicional, a partir de la sección 3.1E se concluye que, cuando se calcula el momento de $\mathbf{F}$ con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Problema modelo 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza $\mathbf{P}$, a lo largo de la diagonal de una cara como se muestra en la figura. Determine el momento de $\mathbf{P}$: a) con respecto a A , b) con respecto a la arista AB y c) con respecto a la diagonal AG del cubo; d) con el resultado del inciso c) determine la distancia perpendicular entre AG y FC .

ESTRATEGIA: Usar las ecuaciones presentadas en esta sección para calcular los momentos que se solicitan. Se puede hallar la distancia entre AG y FC con la expresión del momento M_{AG} .

MODELAR y ANALIZAR:

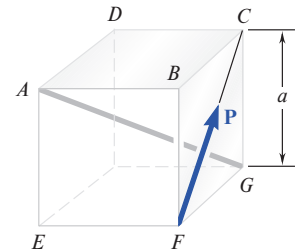
a) Momento con respecto a A . Al seleccionar los ejes x, y y z como se muestra (figura 1), la fuerza $\mathbf{P}$ y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overrightarrow{AF}$, trazado desde A hasta el punto de aplicación F de $\mathbf{P}$, se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{F/A} &= a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \\ \mathbf{P} &= (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a A es el producto vectorial de estos dos vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ \mathbf{M}_A &= (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

(continúa)



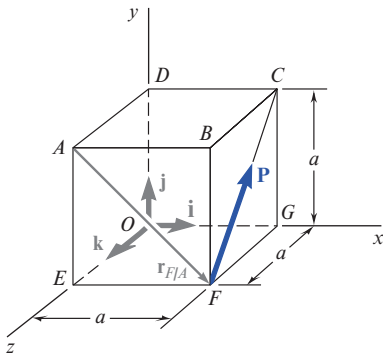


Figura 1 Vector de posición $\mathbf{r}_{F/A}$ y vector de fuerza $\mathbf{P}$ relativos al sistema de coordenadas escogido.

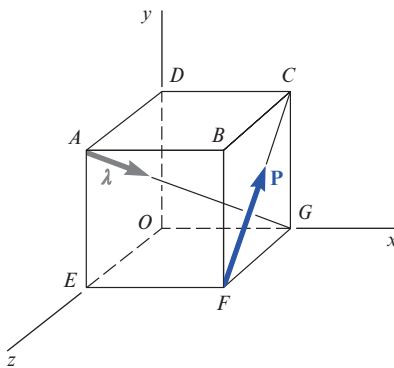


Figura 2 Vector unitario λ utilizado para determinar el momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG .

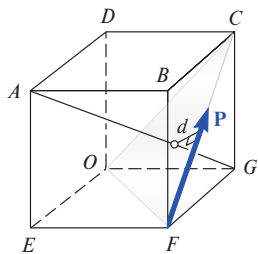


Figura 3 Distancia perpendicular d desde AG hasta FC .

b) Momento con respecto a AB . Proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AB , se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Se verifica que, como AB es paralela al eje x , M_{AB} también es la componente del momento $\mathbf{M}_A$.

c) Momento con respecto a la diagonal AG . El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG se obtiene proyectando a $\mathbf{M}_A$ sobre AG . Denotando con λ el vector unitario a lo largo de AG (figura 2), el cálculo debe lucir de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = \lambda \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. El momento de $\mathbf{P}$ con respecto a AG también se puede expresar en forma de determinante:

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

d) Distancia perpendicular entre AG y FC . Primero se observa que $\mathbf{P}$ es perpendicular a la diagonal AG . Esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$ y verificar que sea igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde AG hasta FC (figura 3). (Se usa el signo negativo puesto que para un observador ubicado en G , la rotación impartida al cubo por $\mathbf{P}$ tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj). Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso c) se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: El signo menos obtenido para M_{AG} indica que la dirección de su vector es opuesta a la del vector unitario λ . La aplicación de la regla de la mano derecha a la fuerza $\mathbf{P}$, considerada con respecto a AG , valida fácilmente este resultado.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección se aplicará el *producto escalar* (o *producto punto*) de dos vectores para determinar el *ángulo formado por*

dos vectores dados y la proyección de una fuerza sobre un eje dado. También se utilizará el *triple producto mixto* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y la *distancia perpendicular entre dos líneas*.

1. Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados. Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes, ecuación (3.30).

2. Cálculo de la proyección de un vector $\mathbf{P}$ sobre un eje dado OL . En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de $\mathbf{P}$ y del vector unitario λ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que λ tenga el sentido correcto (esto es, de que λ esté dirigido desde O hasta L). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman $\mathbf{P}$ y λ , la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado OL . Se definió M_{OL} como

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.40)$$

donde λ es el vector unitario a lo largo de OL y $\mathbf{r}$ es el vector de posición *desde cualquier punto sobre la línea OL hasta cualquier punto sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$* . Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la sección anterior: los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ deben tener el sentido correcto y colocarse en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso *c*) del problema modelo 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: 1) expresar primero λ , $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes rectangulares y 2) evaluar el triple producto mixto $\lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el triple producto mixto es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando λ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de $\mathbf{M}_O$ a lo largo de ese eje.

4. Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas. Se debe recordar que la componente perpendicular F_2 de la fuerza $\mathbf{F}$ es la que tiende a hacer que el cuerpo gire alrededor de un eje dado OL (figura 3.23). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de $\mathbf{F}$ alrededor del eje OL y d es la distancia perpendicular entre OL y la línea de acción de $\mathbf{F}$. Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar d . Primero, supóngase que la fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario λ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela, F_1 de $\mathbf{F}$, se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \lambda$$

El valor de F_2 se determina entonces a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para d .

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso d) del problema modelo 3.5 se simplificó debido a que $\mathbf{P}$ era perpendicular a la diagonal AG . Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, calcule los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

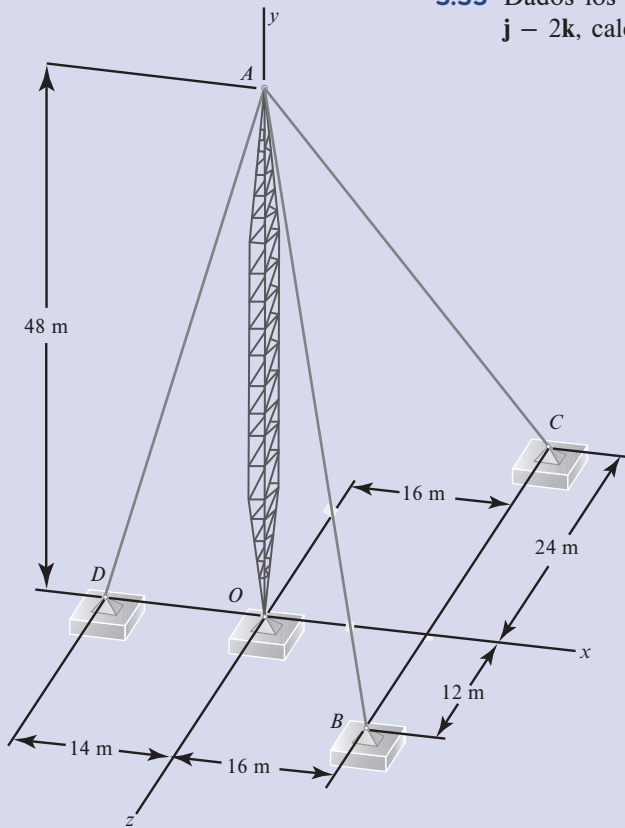


Figura P3.37 y P3.38

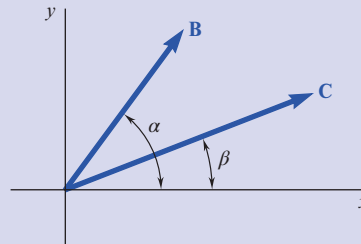


Figura P3.36

3.36 Forme el producto escalar $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y con el resultado verifique la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

3.37 Se conectan tres cables a la parte superior de la torre en A. Determine el ángulo formado por los cables AB y AC.

3.38 Se conectan tres cables a la parte superior de la torre en A. Determine el ángulo formado por los cables AD y AB.

3.39 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 280 lb, determine a) el ángulo entre el cable AC y el brazo AB, b) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A.

3.40 Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 180 lb, determine *a*) el ángulo entre el cable AD y el brazo AB , *b*) la proyección sobre AB de la fuerza ejercida por el cable AD en el punto A .

3.41 Las cuerdas AB y BC son dos de las cuerdas con que se sostiene una carpa. Las dos están atadas a una estaca en B . Si la tensión en la cuerda AB es de 540 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda AB y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda AB en el punto B .

3.42 Las cuerdas AB y BC son dos de las cuerdas con que se sostiene una carpa. Las dos están atadas a una estaca en B . Si la tensión en la cuerda BC es de 490 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda BC y la estaca, *b*) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda BC en el punto B .

3.43 El tubo AB de 20 pulg se desliza a lo largo de una varilla horizontal. Los extremos A y B del tubo se conectan al punto fijo C mediante cordones elásticos. En la posición correspondiente a $x = 11$ pulg, determine el ángulo que forman los dos cordones *a*) con la ecuación (3.30), *b*) con la aplicación de la ley de los cosenos al triángulo ABC .

3.44 Resuelva el problema 3.43 con la posición correspondiente a $x = 4$ pulg.

3.45 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.20*b*) cuando

a) $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$

b) $\mathbf{P} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

3.46 Dados los vectores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + S_z\mathbf{k}$, determine el valor de S_z para el que los tres vectores son coplanares.

3.47 Una grúa está orientada a fin de que el extremo AO del brazo de 25 m esté en el plano yz . En el instante que se muestra en la figura, la tensión del cable AB es de 4 kN. Determine el momento respecto a cada uno de los ejes coordenados de la fuerza ejercida en A por el cable AB .

3.48 El brazo de 25 m de una grúa está en el plano yz . Determine la tensión permisible máxima en el cable AB si el valor absoluto de los momentos

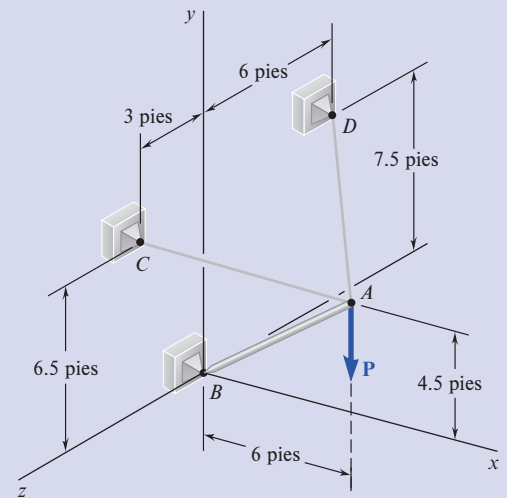


Figura P3.39 y P3.40

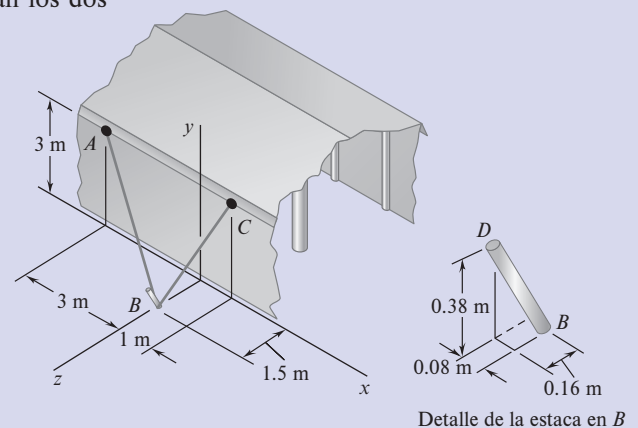


Figura P3.41 y P3.42

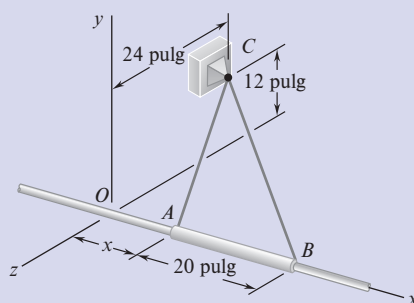


Figura P3.43

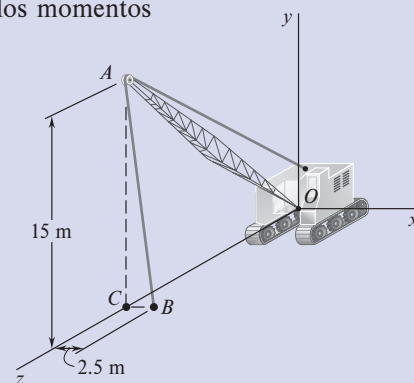


Figura P3.47 y P3.48

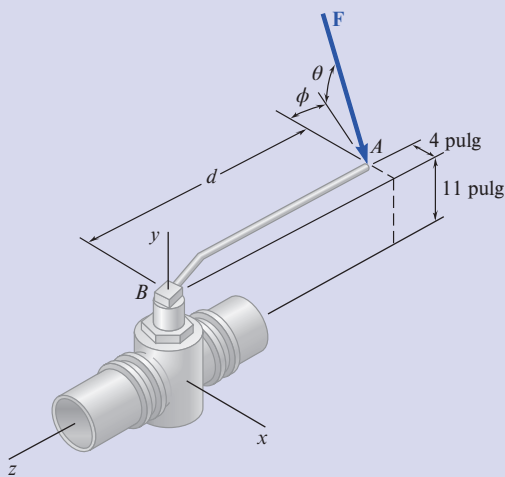


Figura P3.49 y P3.50

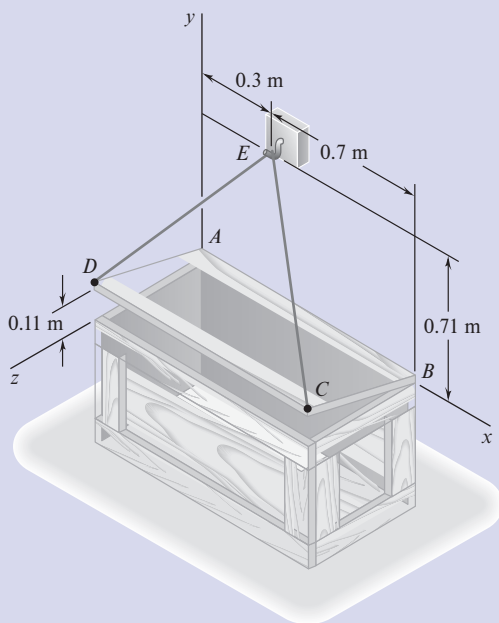


Figura P3.51 y P3.52

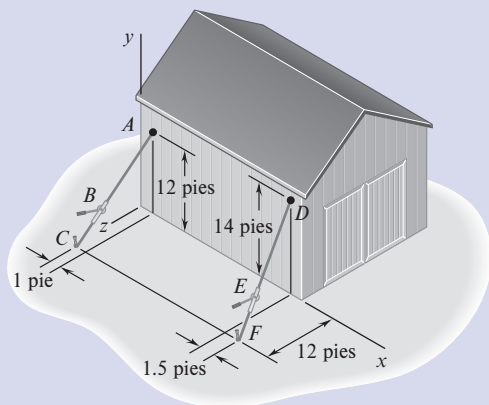


Figura P3.53

respecto a los ejes coordenados de la fuerza ejercida en A por el cable AB debe ser

$$|M_x| \leq 60 \text{ kN}\cdot\text{m}, |M_y| \leq 12 \text{ kN}\cdot\text{m}, |M_z| \leq 8 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

3.49 Para aflojar una válvula congelada se aplica una fuerza F con una magnitud de 70 lb a la manija de la válvula. Si se sabe que $\theta = 25^\circ$, $M_x = -61 \text{ lb}\cdot\text{pie}$ y $M_z = -43 \text{ lb}\cdot\text{pie}$, determine ϕ y d .

3.50 Cuando se aplica una fuerza F a la manija de la válvula que se muestra en la figura, sus momentos respecto a los ejes x y z son $M_x = -77 \text{ lb}\cdot\text{pie}$ y $M_z = -81 \text{ lb}\cdot\text{pie}$, respectivamente. Para $d = 27 \text{ pulg}$, determine el momento M_y de F respecto al eje y .

3.51 La tapa ABCD de un contenedor para almacenamiento mide $0.61 \times 1.00 \text{ m}$, tiene bisagras a lo largo del lado AB y se mantiene abierta al enrollar el cordón DEC sobre un gancho sin fricción en E. Si la tensión en el cordón es de 66 N, determine el momento alrededor de cada uno de los ejes de coordenadas de la fuerza ejercida por la cuerda en D.

3.52 La tapa ABCD de un contenedor para almacenamiento mide $0.61 \times 1.00 \text{ m}$, tiene bisagras a lo largo del lado AB y se mantiene abierta al enrollar el cordón DEC sobre un gancho sin fricción en E. Si la tensión en el cordón es de 66 N, determine el momento alrededor de cada uno de los ejes de coordenadas de la fuerza ejercida por la cuerda en C.

3.53 Un granjero emplea cables para sujetar firmemente una de las paredes de un granero pequeño a los tensores B y E. Si se sabe que la suma de los momentos respecto al eje x de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el granero en los puntos A y D es de 4 728 lb·pie, determine la magnitud de T_{DE} cuando $T_{AB} = 255 \text{ lb}$.

3.54 Resuelva el problema 3.53 si la tensión en el cable AB es de 306 lb.

3.55 Una fuerza P con magnitud de 520 lb actúa sobre el punto E en el marco que se muestra en la figura. Determine el momento de P alrededor de una línea que une los puntos O y D.

3.56 Una fuerza P actúa sobre el punto E en el marco que se muestra en la figura P3.56. Si se sabe que el valor absoluto del mo-

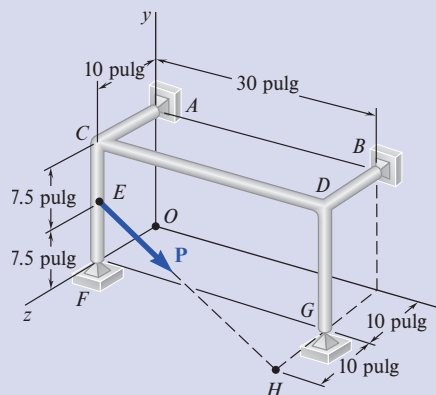


Figura P3.55 y P3.56

mento de $\mathbf{P}$ alrededor de una línea que une los puntos F y B es 300 lb·pie, determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$.

3.57 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable que pasa a través de un anillo en B y está unido a los ganchos en G y H . Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N, determine el momento respecto a la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.58 En el problema 3.57, determine el momento respecto a la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BG del cable.

3.59 La placa triangular ABC está apoyada en juntas de rótula en B y D , y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable AE en A es de 55 N, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D y B .

3.60 La placa triangular ABC está apoyada en juntas de rótula en B y D , y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 33 N, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D y B .

3.61 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . Se aplica una fuerza $\mathbf{P}$ a lo largo del borde BC como se muestra en la figura. Determine el momento de $\mathbf{P}$ respecto al borde OA .

3.62 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . a) Demuestre que dos bordes opuestos, como OA y BC , son perpendiculares entre sí. b) Con esta propiedad y el resultado del problema 3.61, determine la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC .

3.63 Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en el espacio tienen la misma magnitud F . Demuestre que el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_2$ es igual al momento de $\mathbf{F}_2$ respecto a la línea de acción de $\mathbf{F}_1$.

***3.64** En el problema. 3.55, determine la distancia perpendicular entre una línea que une los puntos O y D y la línea de acción de $\mathbf{P}$.

***3.65** En el problema. 3.56, determine la distancia perpendicular entre una línea que une los puntos F y B y la línea de acción de $\mathbf{P}$.

***3.66** En el problema 3.57, determine la distancia perpendicular entre el tramo BH del cable y la diagonal AD .

***3.67** En el problema 3.58, determine la distancia perpendicular entre el tramo BG del cable y la diagonal AD .

***3.68** En el problema 3.59, determine la distancia perpendicular entre el cable AE y la línea que une los puntos D y B .

***3.69** En el problema 3.60, determine la distancia perpendicular entre el cable CF y la línea que une los puntos D y B .

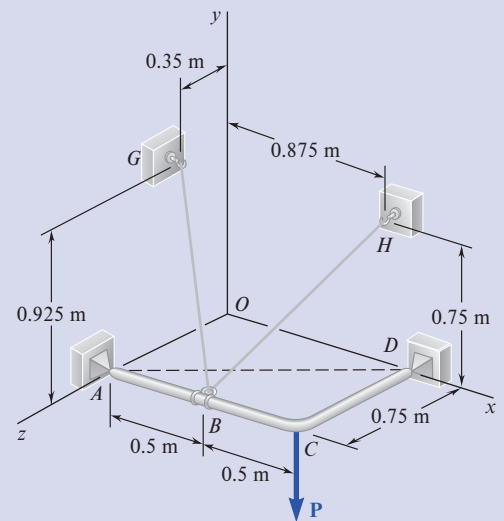


Figura P3.57

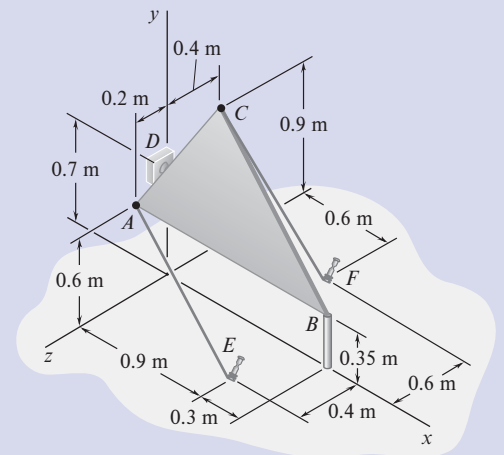


Figura P3.59 y P3.60

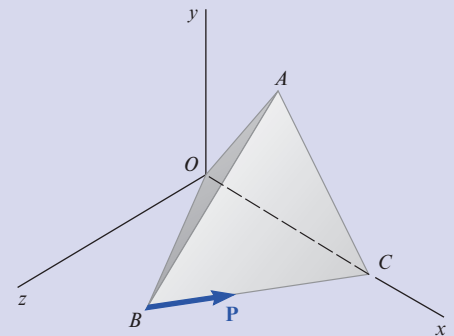


Figura P3.61 y P3.62

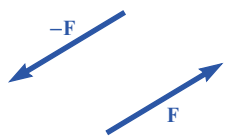


Figura 3.25 Un par consiste de dos fuerzas con la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos.

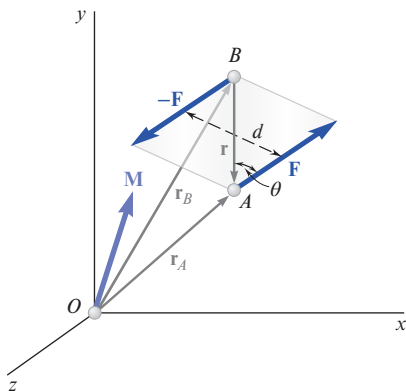


Figura 3.26 El momento $\mathbf{M}$ del par con respecto a O es la suma de los momentos de $\mathbf{F}$ y de $-\mathbf{F}$ con respecto a O .

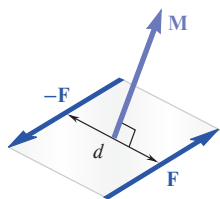


Figura 3.27 El momento $\mathbf{M}$ de un par es igual al producto de $\mathbf{F}$ y d , es perpendicular al plano del par y es un vector libre que puede aplicarse en cualquier punto.

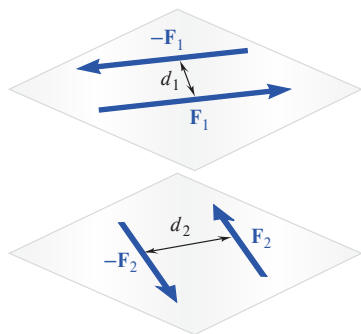


Figura 3.28 Dos pares tienen el mismo momento si se encuentran en planos paralelos, tienen el mismo sentido y si $F_1 d_1 = F_2 d_2$.

3.3 PARES Y SISTEMA FUERZA-PAR

Una vez que se han estudiado los efectos de las fuerzas y momentos sobre un cuerpo rígido se puede considerar si es posible simplificar el sistema de fuerzas y momentos sin alterar dichos efectos. De hecho, es *posible* reemplazar un sistema de fuerzas y momentos con un sistema equivalente y más sencillo. Una de las ideas fundamentales que se emplea en dicha transformación se denomina un par.

3.3A Momento de un par

Se dice que *dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.25). La suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Las dos fuerzas no causan que el cuerpo sobre el que actúan se mueva sobre una línea (traslación), pero sí tienden a hacerlo rotar.

A continuación se representarán con $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ (figura 3.26). La suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas se concluye que la suma de los momentos de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$, con respecto a O , está representada por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.45)$$

El vector $\mathbf{M}$ se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas, y su magnitud está dada por

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.46)$$

donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ y θ es el ángulo $\mathbf{F}$ (o $-\mathbf{F}$) y $\mathbf{r}$. El sentido de $\mathbf{M}$ está definido por la regla de la mano derecha.

Como el vector $\mathbf{r}$ en (3.45) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ se hubieran calculado con respecto a un punto diferente O' . Por tanto, el momento $\mathbf{M}$ de un par es un *vector libre* (sección 2.1B) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.27).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.28), tendrán momentos iguales si

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.47)$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido (es decir, en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario al de las manecillas del reloj).

3.3B Pares equivalentes

Imagine que tres pares actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular (figura 3.29). Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento $\mathbf{M}$ (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb-pulg}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser

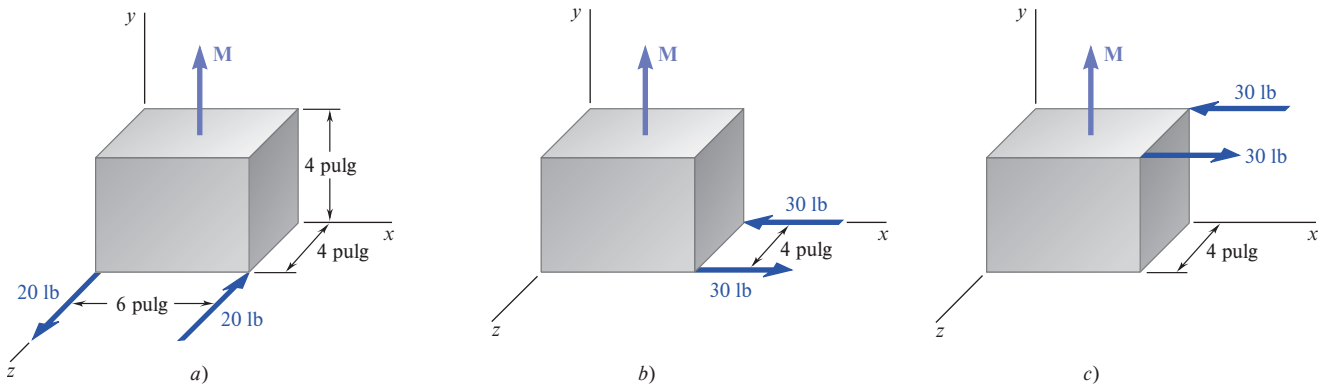


Figura 3.29 Tres pares equivalentes. a) Un par que actúa en la parte inferior de la caja en sentido contrario a las manecillas del reloj si se lo observa desde arriba; b) un par en el mismo plano y con el mismo sentido, pero mayores fuerzas que en a); c) un par que actúa en un plano diferente, pero con el mismo sentido.

aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.1A) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.1B). Por tanto, se establecerá que **dos sistemas de fuerzas son equivalentes** (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) **si pueden transformarse a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones**: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que **dos pares que tienen el mismo momento M son equivalentes**. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.30). El primer par está constituido por las fuerzas F_1 y $-F_1$ de magnitud F_1 , las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.30a). El segundo par está constituido por las fuerzas F_2 y $-F_2$ de magnitud F_2 , localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.30d). Como los dos pares tienen el mismo momento M , que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj), y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.47)$$

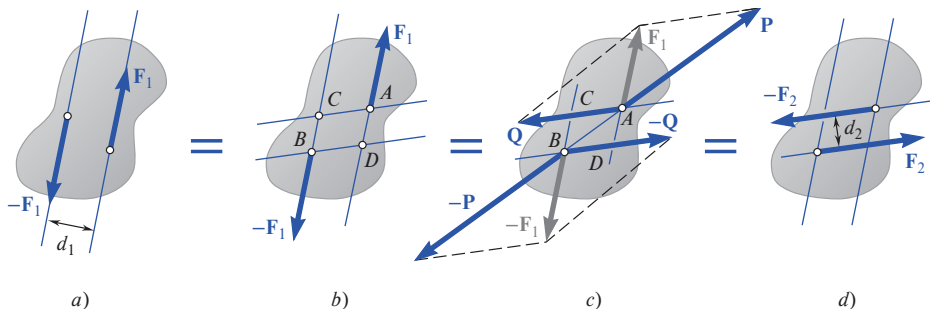
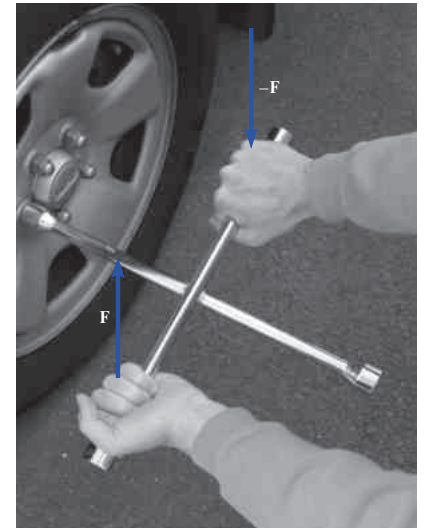


Figura 3.30 Los cuatro pasos para transformar un par en otro par en el mismo plano con operaciones simples. a) Par inicial; b) rotular puntos de intersección de las líneas de acción de ambos pares; c) descomponer las fuerzas del primer par en sus componentes; d) par final.



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta son ejemplo de un par.
©Lucinda Dowell/McGraw-Hill

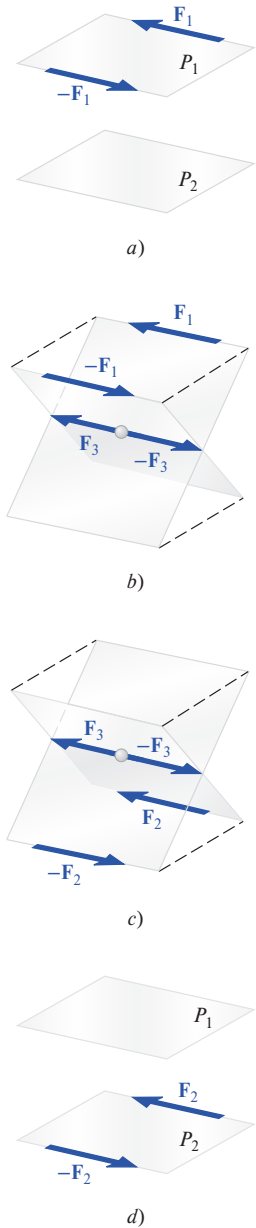


Figura 3.31 Los cuatro pasos para transformar un par en otro par en un plano paralelo con operaciones simples. a) Par inicial; b) agregar un par de fuerzas sobre la línea de intersección de dos planos diagonales; c) reemplazar los pares con pares equivalentes en el mismo plano; d) par final.

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

Se representan con A , B , C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares. Primero, se deslizan las fuerzas F_1 y $-F_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B , como se muestra en la figura 3.30b). Entonces, la fuerza F_1 se descompone en una componente P a lo largo de la línea AB y una componente Q a lo largo de AC (figura 3.30c); similarmente, la fuerza $-F_1$ se descompone en $-P$ a lo largo de AB y en $-Q$ a lo largo de BD . Las fuerzas P y $-P$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por F_1 y $-F_1$ se reduce al par constituido por Q y $-Q$.

A continuación se comprueba que las fuerzas Q y $-Q$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-F_2$ y F_2 . El momento del par formado por Q y $-Q$ puede obtenerse calculando el momento de Q con respecto a B ; en forma similar, el momento del par formado por F_1 y $-F_1$ es el momento de F_1 con respecto a B . Pero, por el teorema de Varignon, el momento de F_1 es igual a la suma de los momentos de sus componentes P y Q . Como el momento de P con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por Q y $-Q$ debe ser igual al momento del par formado por F_1 y $-F_1$. Recordando (3.47) se escribe

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \quad \text{y} \quad Q = F_2$$

Por tanto, las fuerzas Q y $-Q$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-F_2$ y F_2 , y el par de la figura 3.30a) es equivalente al par de la figura 3.30d).

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2 ; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.31a) y d). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de F_1 y $-F_2$ y por las líneas de acción de $-F_1$ y F_2 (figura 3.31b). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas F_3 y $-F_3$, que son iguales, respectivamente, a F_1 y $-F_1$. El par formado por F_1 y $-F_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por F_3 y $-F_2$ (figura 3.31c) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano diagonal. En forma análoga, el par formado por $-F_1$ y F_3 puede ser reemplazado por un par constituido por $-F_3$ y F_2 . Cancelando las dos fuerzas iguales y opuestas F_3 y $-F_3$ se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.31d). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento M son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas producen. Lo único que importa es el *momento* del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.3C Adición o suma de pares

Se consideran dos planos P_1 y P_2 que se intersectan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2 . Se debe recordar que cada par es un vector libre en su respectivo plano y puede representarse dentro del mismo con cualquier combinación de fuerzas iguales, opuestas y paralelas y la distancia perpendicular de separación que brinda el mismo sentido y magnitud para dicho par. Se puede suponer, sin perder la

generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 3.32a). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B . La resultante $\mathbf{R}$ de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con $\mathbf{r}$ el vector que une a B con A y si se recuerda la definición de par (sección 3.3A), el momento $\mathbf{M}$ del par resultante queda expresado como

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

Por el teorema de Varignon, podemos ampliar esta expresión a

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

El primer término en la expresión obtenida representa al momento $\mathbf{M}_1$ del par en P_1 y el segundo término representa al momento $\mathbf{M}_2$ del par en P_2 . Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (3.48)$$

Se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ es un par de momento $\mathbf{M}$ igual a la suma vectorial de $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ (figura 3.32b). Podemos ampliar esta conclusión y afirmar que se puede sumar cualquier cantidad de pares $\mathbf{M}_i$ para generar un par resultante,

$$\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

3.3D Vectores de pares

Como se vio los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par produce sobre un cuerpo rígido (figura 3.33a). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (figura 3.33b). Por otra parte, también hemos visto que la suma de dos pares es otro par y que el momento $\mathbf{M}$ del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial de los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$, de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores, y la flecha usada en la figura 3.33b) para representar al par definido en la figura 3.33a) puede considerarse como un vector verdadero.

El vector que representa un par recibe el nombre de **vector de par**. Obsérvese que en la figura 3.33 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, *el cual representa al par mismo*, del *momento* del par, que se representó con una flecha en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo $\curvearrowright$ a esta flecha con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.33c). Además, el vector de par $\mathbf{M}$ se puede descomponer en componentes vectoriales $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ y $\mathbf{M}_z$, las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.33d).

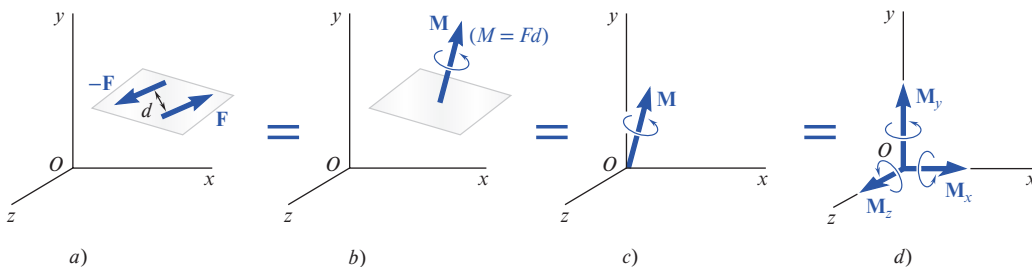


Figura 3.33 a) Un par formado por dos fuerzas puede representarse por b) un vector de par, orientado de forma perpendicular al plano del par. c) El vector de par es un vector libre y puede moverse a otros puntos de aplicación, como el origen. d) Un vector de par puede descomponerse en componentes sobre los ejes coordenados.

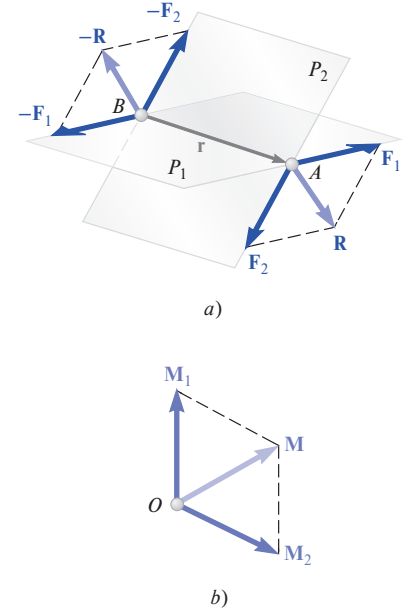


Figura 3.32 a) Se pueden sumar dos pares, de los cuales cada uno actúa en uno de dos planos que se intersectan, para formar un nuevo par. b) El momento del par resultante es la suma vectorial de los momentos de los pares de las componentes.

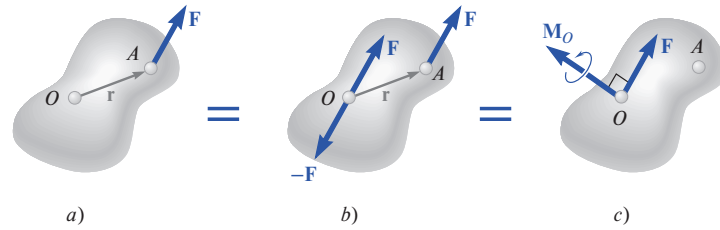


Figura 3.34 Reemplazar una fuerza con una fuerza y un par. a) La fuerza inicial $\mathbf{F}$ que actúa sobre el punto A ; b) unida a fuerzas iguales y opuestas sobre O ; c) la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre el punto O y un par.

Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos yz , zx y xy .

3.3E Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par

Considere una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición $\mathbf{r}$ (figura 3.34a). Suponga que a fin de simplificar el análisis se quiere que la fuerza actúe en el punto O . Aunque $\mathbf{F}$ se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto O , que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que $\mathbf{F}$ produce sobre el cuerpo rígido.

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto O , una igual a $\mathbf{F}$ y otra igual a $-\mathbf{F}$, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.34b). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza $\mathbf{F}$ se aplica en O ; las otras dos fuerzas forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto,

cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O .

El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de O que la fuerza $\mathbf{F}$ ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto O . El par se representa por el vector de par $\mathbf{M}_O$ que es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$. Como $\mathbf{M}_O$ es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O , junto con $\mathbf{F}$. Se hace referencia a la combinación obtenida como un **sistema fuerza-par** (figura 3.34c).

Si la fuerza $\mathbf{F}$ se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (figura 3.35a) y c) se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' , y se hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por $\mathbf{F}$ y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de $\mathbf{F}$ con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (3.49)$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector que une a O' con O . De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O' se obtiene sumándole al momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O .

Este resultado también pudo obtenerse observando que para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (figura 3.35b) y c), el vector de par $\mathbf{M}_O$ se puede mover libremente a O' ; sin embargo, para mover la fuerza $\mathbf{F}$ de O a O' es necesario agregarle a $\mathbf{F}$ un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O . Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de $\mathbf{M}_O$ y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

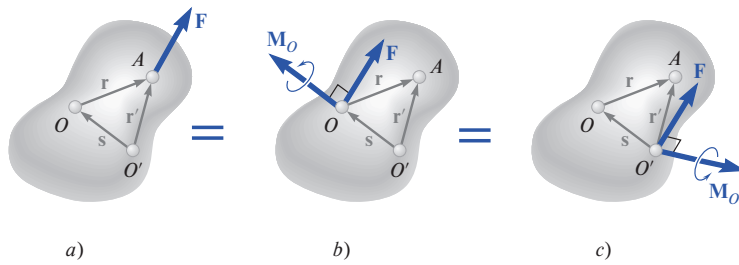


Figura 3.35 Traslado de una fuerza a diferentes puntos. a) Fuerza $\mathbf{F}$ inicial que actúa sobre A ; b) fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre O y un par; c) fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre O' y un par diferente.

Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza $\mathbf{F}$ de un punto A a un punto O consta de un vector de fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ perpendicular a $\mathbf{F}$. Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza $\mathbf{F}$ y de un vector de par $\mathbf{M}_O$ que sean *mutuamente perpendiculares* puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza $\mathbf{F}$ en el plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ hasta que su momento con respecto a O sea igual al momento del par que se desea eliminar.



Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.
©Steve Hix

Problema modelo 3.6

Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.

ESTRATEGIA: Buscar maneras para sumar fuerzas iguales y opuestas al diagrama que, junto con las distancias perpendiculares ya conocidas, producirán nuevos pares con momentos sobre los ejes coordenados. Esto puede combinarse en un par equivalente simple.

MODELAR: Los cálculos se pueden simplificar si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas (figura 1). Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano zx ; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy .

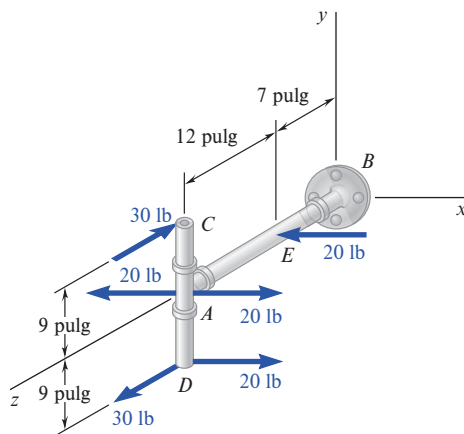


Figura 1 Se fijan dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas para simplificar los cálculos.

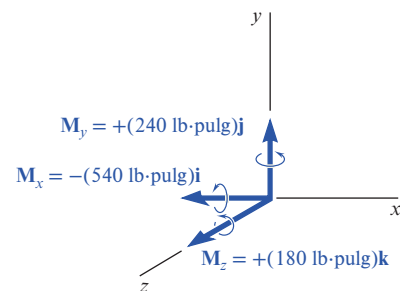
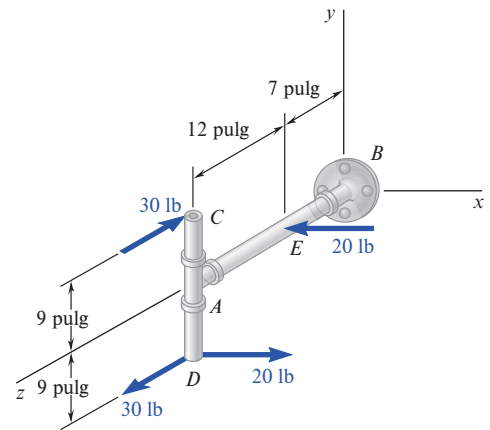


Figura 2 Los tres pares representados como vectores de par.

(continúa)

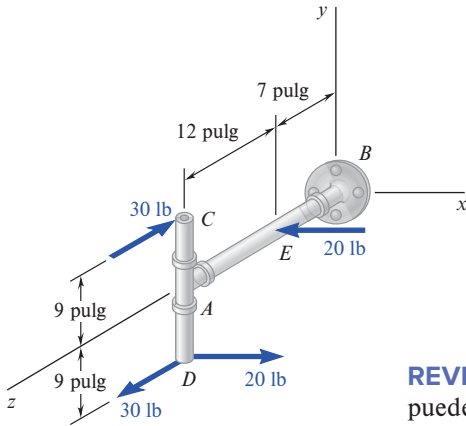


Figura 3 Utilizando el sistema de fuerzas dado, también se puede determinar el par equivalente simple a partir de la suma de momentos de las fuerzas con respecto a cualquier punto, como el punto D.

ANALIZAR: Los tres pares pueden ser representados por tres vectores de par M_x , M_y y M_z dirigidos a lo largo de los ejes coordenados (figura 2). Los momentos correspondientes son

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ pulg}) = -540 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ pulg}) = +240 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$$

$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ pulg}) = +180 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$$

Estos tres momentos representan las componentes del par simple M , equivalente a los dos pares dados. Se puede escribir M como

$$M = -(540 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{i} + (240 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{j} + (180 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{k}$$

REVISAR y PENSAR: Las componentes del par equivalente simple M también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D, el momento será (figura 3)

$$M = M_D = (18 \text{ pulg})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ pulg})\mathbf{j} - (12 \text{ pulg})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

Después de calcular los diversos productos cruz, se obtiene el mismo resultado,

$$M = -(540 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{i} + (240 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{j} + (180 \text{ lb}\cdot\text{pulg})\mathbf{k}$$

Problema modelo 3.7

Reemplace el par y la fuerza mostrados por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

ESTRATEGIA: Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. Al mover la fuerza de este sistema de fuerza-par una distancia que crea el mismo momento que el par se puede reemplazar el sistema con una fuerza equivalente.

MODELAR y ANALIZAR: Para reemplazar la fuerza y el par dados, la fuerza $F = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ debe moverse a O y al mismo tiempo agregarse un par de momento M_O igual al momento con respecto a O de la fuerza en su posición original (figura 1). Por tanto,

$$M_O = \vec{OB} \times F = [(0.150 \text{ m})\mathbf{i} + (0.260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(60 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

Cuando se suma este nuevo par al par de momento $-(24 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ formado por las dos fuerzas de 200 N se obtiene un par de momento $-(84 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ (figura 2). Se puede reemplazar este último par al aplicar la fuerza F en un punto C seleccionado de manera que

$$-(84 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = \vec{OC} \times F \\ = [(OC)\cos 60^\circ\mathbf{i} + (OC)\sin 60^\circ\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(OC)\cos 60^\circ(400 \text{ N})\mathbf{k}$$

El resultado es

$$(OC) \cos 60^\circ = 0.210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm}$$

(continúa)

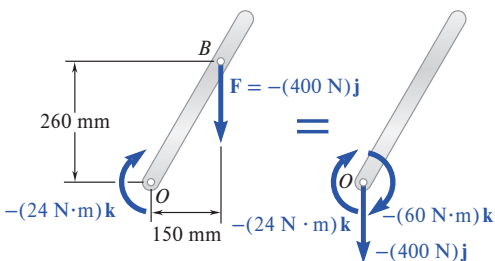
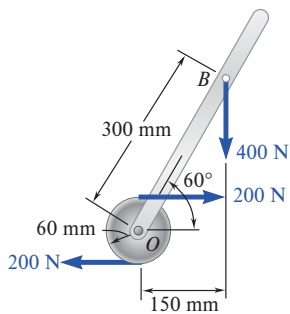


Figura 1 Reemplazar la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O.

REVISAR y PENSAR: Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par de momento $-(24 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$ puede trasladarse a B ; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B (figura 3). Ahora el par puede eliminarse aplicando la fuerza $\mathbf{F}$ en un punto C elegido de manera que

$$\begin{aligned} -(24 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} &= \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\ &= -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} (BC) \cos 60^\circ &= 0.060 \text{ m} = 60 \text{ mm} & BC &= 120 \text{ mm} \\ OC &= OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} & OC &= 420 \text{ mm} \end{aligned}$$

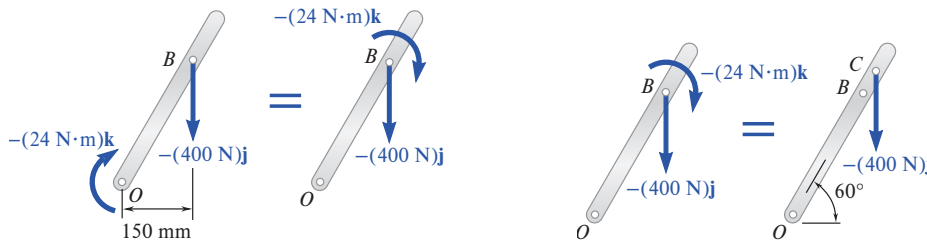


Figura 3 El par se puede trasladar a B sin alterar el efecto. Este par puede eliminarse al trasladar la fuerza $\mathbf{F}$.

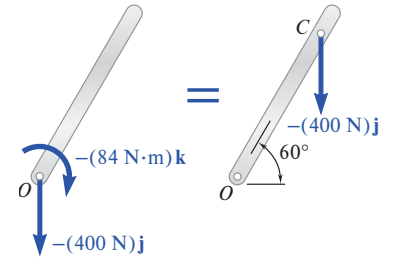


Figura 2 Par resultante eliminado al trasladar la fuerza $\mathbf{F}$.

ESTUDIO DE CASO 3.1*

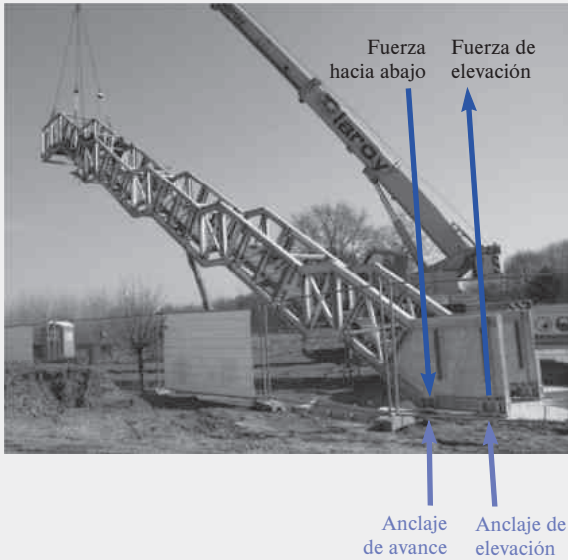
La torre Vlooybergtoeren en Tielt-Winge, Bélgica, fue construida con el propósito de proporcionar una plataforma distintiva y única para que los visitantes vean el “bosque de cuento de hadas” de Kabouterbos (fotografía EC 3.1). La escalera y la plataforma de observación están sostenidas por un marco de acero estructural (fotografía EC 3.2) revestido con acero resistente a la intemperie (que se oxida para producir un tono naranja rojizo, lo que forma una capa protectora que inhibe la corrosión adicional). En general, esta estructura en voladizo tiene una altura de 11.3 m sobre el suelo y pesa aproximadamente 130 kN.* La base de la torre está



Fotografía EC 3.1 Torre Vlooybergtoeren en Tielt-Winge, Bélgica.
Izquierda: ©Kris Van den Bosch. Derecha: ©Yves Willem

*Fuente: “What’s Cool in Steel?” *Modern Steel Construction*, Chicago, IL: The American Institute of Steel Construction, agosto de 2016, pp. 42 y 43.

(continúa)



Fotografía EC 3.2 Torre en construcción que muestra el marco de acero y los soportes de anclaje.

©Yves Willem

protegida contra el vuelco por los puntos de anclaje que se muestran en la fotografía EC 3.2. Considerando solo el peso propio de la torre, se estimará el par de fuerza equivalente resultante aplicado en el soporte que evita su elevación (es decir, del anclaje hacia la parte trasera de la torre). Luego se usará este par de fuerzas equivalente para determinar la fuerza de elevación total que actúa sobre el soporte.

ESTRATEGIA: Se usará un modelo bidimensional para representar la torre y soportes simples (un pasador y un rodillo) para modelar las condiciones reales de la base. Se reemplaza la carga del peso propio por un par de fuerza equivalente en el soporte del anclaje de elevación. Luego, al sustituir el momento del par por fuerzas verticales aplicadas en las dos ubicaciones de los soportes, es posible determinar la fuerza de elevación total.

MODELAR: La figura EC 3.1 proporciona la geometría supuesta para la torre, con los soportes *A* y *B* ubicados en la base de la torre y debajo de la superficie del suelo. (El soporte *A* refleja el anclaje sujeto a levantamiento). La carga muerta de 135 kN se aplica en el *centro de gravedad* de la estructura, un

concepto que se examinará en detalle en el capítulo 5. (Con propósitos demostrativos se asumirá un centro de gravedad *G* aproximado como el que se muestra en la figura EC 3.1. Se ha colocado más cerca del extremo izquierdo que del derecho porque la estructura de soporte se vuelve cada vez más pesada hacia la base de la torre).

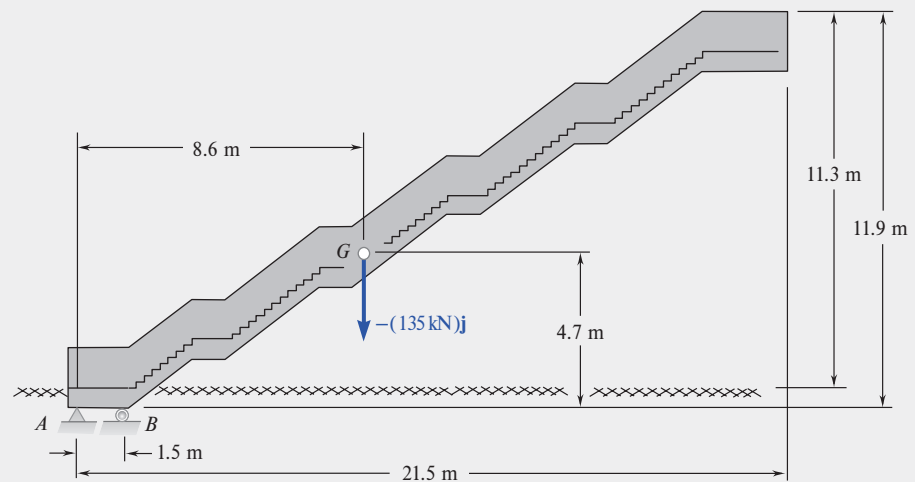


Figura EC 3.1 Modelo de torre.

ANÁLISIS:

a) Sistema fuerza-par en A. Para reemplazar la fuerza dada de 135 kN se mueve la fuerza $\mathbf{F} = -(135 \text{ kN})\mathbf{j}$ hacia *A*, y al mismo tiempo se agrega un par de momento $\mathbf{M}_A$ que es igual al momento alrededor de *A* de la fuerza en su posición original (figura EC 3.2a):

(continúa)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \overrightarrow{AG} \times \mathbf{F} = [(8.6 \text{ m})\mathbf{i} + (4.7 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-135 \text{ kN})\mathbf{j} \\ &= -(1\,161 \text{ kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

b) Fuerzas verticales equivalentes al momento del par $\mathbf{M}_A$. Para reemplazar el momento del par $\mathbf{M}_A$ con dos fuerzas verticales iguales y opuestas en las ubicaciones de apoyo A y B , separadas por una distancia perpendicular $d = 1.5 \text{ m}$, divide M_A entre esta distancia perpendicular. La magnitud resultante de cada fuerza es

$$F = \frac{M_A}{d} = \frac{1\,161 \text{ kN} \cdot \text{m}}{1.5 \text{ m}} = 774 \text{ kN}$$

Estas fuerzas se dirigen como se muestra en la figura 3.2b).

c) Fuerza de levantamiento en el anclaje A . Al combinar las fuerzas que actúan en A en la figura EC 3.2b) se obtiene el resultado que se muestra en la figura EC 3.2c). Al ser un sistema completo, equivalente a la carga original, el par de fuerzas en la figura EC 3.2c) representa la carga total ejercida por el peso propio de la torre sobre estos soportes. Por tanto, la elevación total ejercida sobre el anclaje en A es la fuerza equivalente en este punto, o

$$639 \text{ kN} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

(Debido a que el marco estructural consta de dos lados iguales, esta fuerza de elevación total se dividiría equitativamente sobre ambos lados).

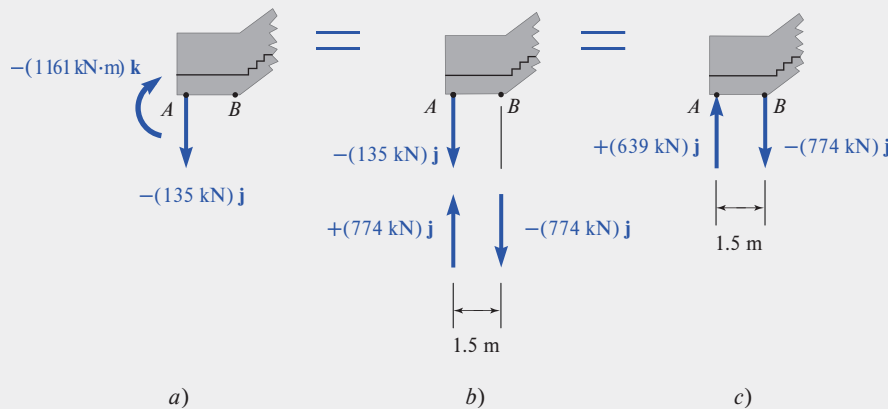


Figura EC 3.2 a) Fuerza-par equivalente en A, b) momento del par reemplazado por dos fuerzas verticales en A y B, c) sistema equivalente total de fuerzas verticales aplicadas en los soportes A y B.

REVISAR y PENSAR: Las fuerzas equivalentes ejercidas sobre los apoyos, como las que se muestran en la figura EC 3.2c), son iguales y opuestas a las reacciones de apoyo que actúan sobre la estructura en estos puntos. Tales reacciones pueden determinarse de manera más directa mediante los principios del equilibrio de cuerpos rígidos que se examinarán en el capítulo 4.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento $\mathbf{M}$. Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, $\mathbf{M}$ es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, $\mathcal{M}$, para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta sección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. Sumar dos o más pares. Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados (problema modelo 3.6).

2. Reemplazar una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado. Como se explicó en la sección 3.3E, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza solo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. Reemplazar un sistema fuerza-par (con $\mathbf{F}$ perpendicular a $\mathbf{M}$) con una sola fuerza equivalente. Obsérvese que el requisito de que $\mathbf{F}$ y $\mathbf{M}$ sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a $\mathbf{F}$ y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a $\mathbf{M}$ (problema modelo 3.7).

Problemas

3.70 Se aplican dos fuerzas de 80 N en las esquinas B y D de una placa rectangular, como se muestra en la figura. *a)* Determine el momento del par formado por las dos fuerzas descomponiendo cada fuerza en sus componentes horizontal y vertical para después sumar los momentos de los dos pares resultantes. *b)* Utilice los resultados obtenidos para determinar la distancia perpendicular entre las líneas BE y DF .

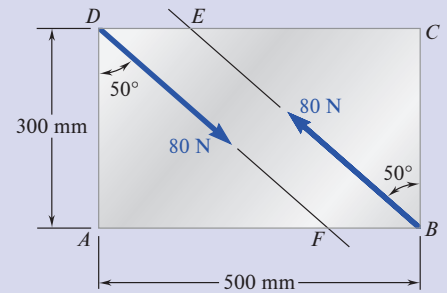


Figura P3.70

3.71 Se aplican dos fuerzas paralelas de 60 N a las esquinas A y C de una placa cuadrada de 200 mm, como se muestra en la figura. Determine el momento del par formado por las dos fuerzas *a)* multiplicando su magnitud por su distancia perpendicular, *b)* descomponiendo cada fuerza en sus componentes horizontal y vertical, para después sumar los momentos de los dos pares resultantes.

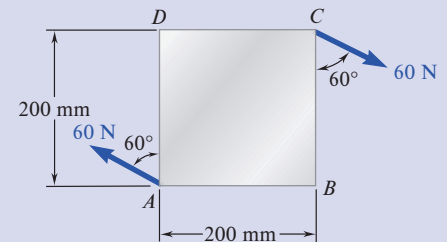


Figura P3.71

3.72 Se utiliza una máquina de perforación múltiple para perforar simultáneamente seis orificios en la placa de acero que se muestra en la figura. Cada taladro ejerce un par de 40 lb-pulg en sentido horario sobre la placa. Determine un par equivalente formado por las fuerzas más pequeñas posibles que actúen *a)* en A y C , *b)* en A y D , *c)* sobre la placa.

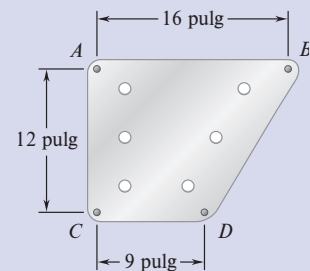


Figura P3.72

3.73 Cuatro clavijas del mismo diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas y se jalen con las fuerzas indicadas. Determine el diámetro de las clavijas si se sabe que el par resultante aplicado a la tabla es de 1 132.5 lb-pulg en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

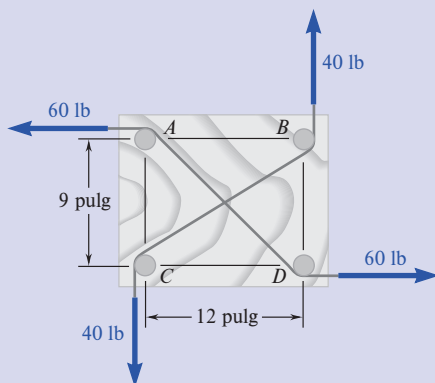


Figura P3.73

3.74 Una pieza de madera en la que se taladraron de manera sucesiva varios orificios está asegurada a un banco de trabajo mediante dos clavos. Si se sabe que el taladro ejerce un par de 12 N·m sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes

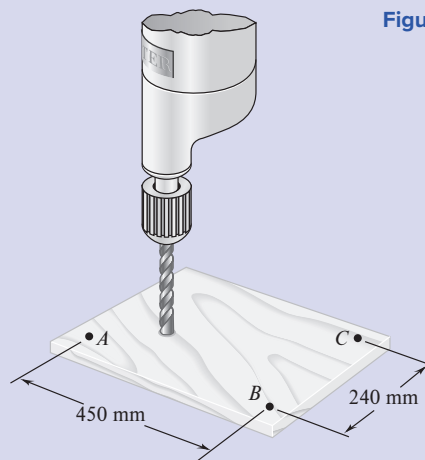


Figura P3.74

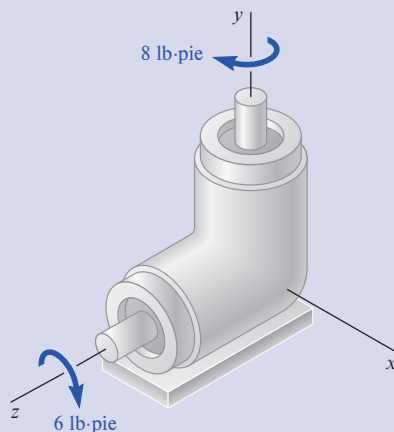


Figura P3.75

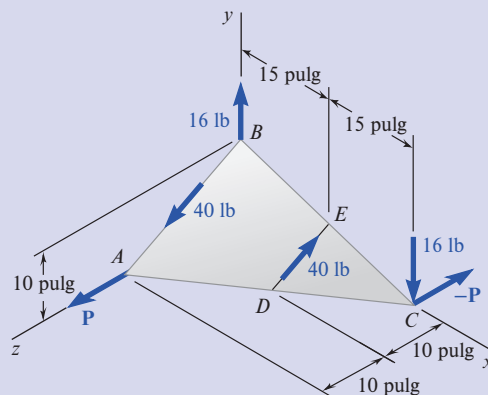


Figura P3.76 y P3.77

aplicadas a los clavos si estos se localizan a) en A y B, b) en B y C, c) en A y C.

3.75 Los dos pares mostrados actúan sobre los ejes de una transmisión en ángulo. Reemplace los dos pares por un par único equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.76 Si $P = 0$ en la figura, reemplace los dos pares restantes con un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.77 Si $P = 20$ lb en la figura, reemplace los tres pares con un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.78 Los dos pares que se muestran en la figura deben reemplazarse por un solo par equivalente. Determine a) el vector de par que representa el par equivalente, b) las dos fuerzas que actúan en B y C que pueden usarse para formar ese par.

3.79 Resuelva el inciso a) del problema 3.78 suponiendo que se han agregado dos fuerzas verticales de 15 N, una que actúa hacia arriba en A y la otra hacia abajo en C.

3.80 Los dos ejes A y B conectan la caja de cambios con el conjunto de ruedas de un tractor y el eje C lo conecta al motor. Los ejes A y B están en el plano yz vertical, mientras que el eje C se dirige a lo largo del eje x. Sustituya los pares aplicados en los ejes por un único par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.81 Una fuerza de 500 N se aplica a una placa doblada como muestra la figura. Determine a) un sistema equivalente fuerza-par en B, b) un sistema equivalente formado por una fuerza vertical en A y una fuerza en B.

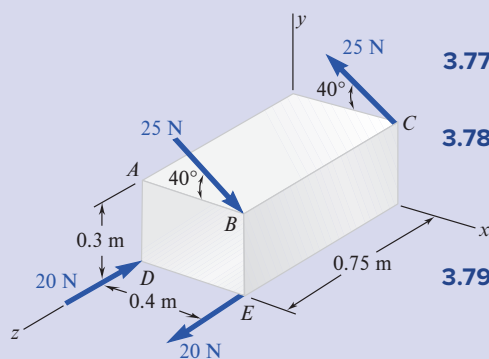


Figura P3.78

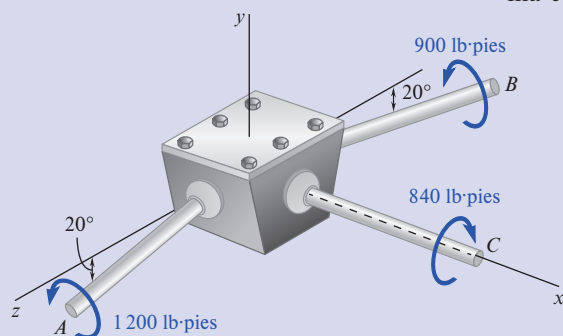


Figura P3.80

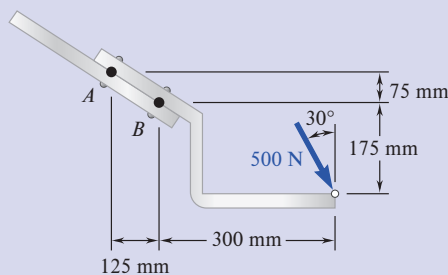


Figura P3.81

3.82 En la fotografía P3.82 se muestra a una persona sujetando un objeto con un brazo artificial, cuya articulación en el codo debe diseñarse para resistir distintas condiciones de carga. Si una de estas condiciones implica fuerzas horizontal y vertical aplicadas en el punto B , para cualquier ángulo θ del brazo (como se muestra en la figura P3.82), determine: *a*) El ángulo θ que genera el mayor par equivalente en la articulación del codo A . *b*) El sistema equivalente fuerza-par en A , correspondiente a las fuerzas aplicadas en B .

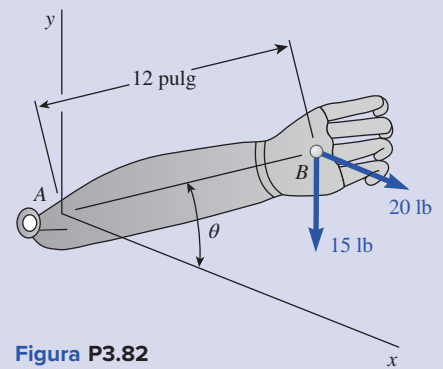


Figura P3.82

3.83 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en B . Si la tensión en el cable es de 1 040 N, reemplace la fuerza ejercida por el cable en B con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C .

3.84 Se aplica una fuerza vertical P de 30 lb sobre la ménsula que se muestra en la figura, la cual se sostiene mediante dos tornillos en B y C . *a*) Reemplace P por un sistema equivalente fuerza-par en B . *b*) Encuentre las dos fuerzas horizontales en B y C equivalentes al par obtenido en el inciso *a*).



Fotografía P3.82

©UfaBizPhoto/Shutterstock

3.85 Un trabajador intenta mover una roca al aplicar una fuerza de 360 N a una barra de acero, como se muestra en la figura. *a*) Reemplace dicha fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en D . *b*) Dos trabajadores intentan mover la misma roca al aplicar una fuerza vertical en A y otra fuerza en D . Determine estas fuerzas si deben ser equivalentes a la fuerza única del inciso *a*).

3.86 Un trabajador intenta mover una roca al aplicar una fuerza de 360 N a una barra de acero, como se muestra en la figura. Si dos trabajadores intentan mover la misma roca al aplicar una fuerza en A y una fuerza paralela en C , determine estas dos fuerzas para que sean equivalentes a la fuerza única de 360 N mostrada en la figura.

3.87 Las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección transversal de una canal de acero se representan mediante una fuerza vertical de 900 N y dos fuerzas horizontales de 250 N, como se muestra en la figura. Reemplace esta fuerza y este par con una sola fuerza F aplicada en el punto C , y determine la distancia x desde C hasta la línea BD . (El punto C se define como el centro de corte de la sección).

3.88 Si se sabe que $\alpha = 60^\circ$, reemplace la fuerza y el par que se muestran en la figura con una sola fuerza aplicada en un punto

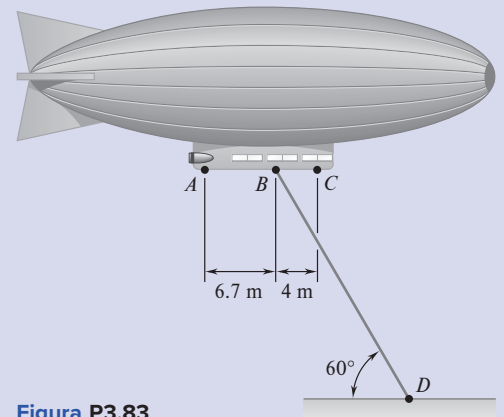


Figura P3.83

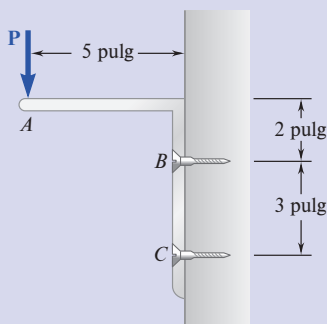


Figura P3.84

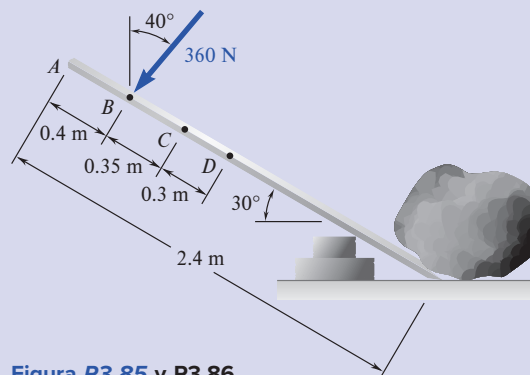


Figura P3.85 y P3.86

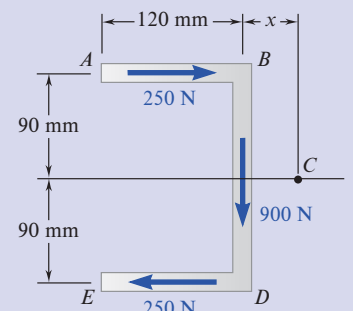


Figura P3.87

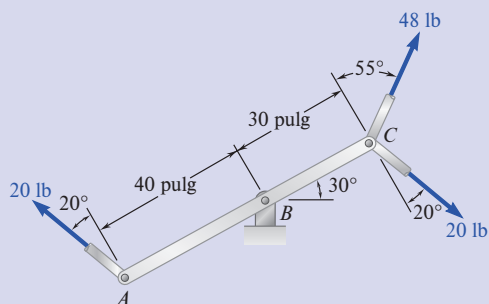


Figura P3.89

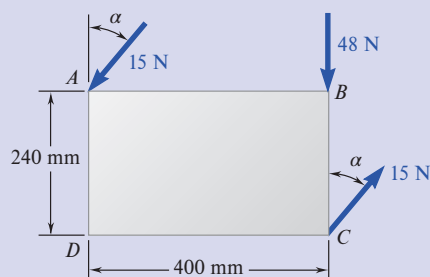


Figura P3.90

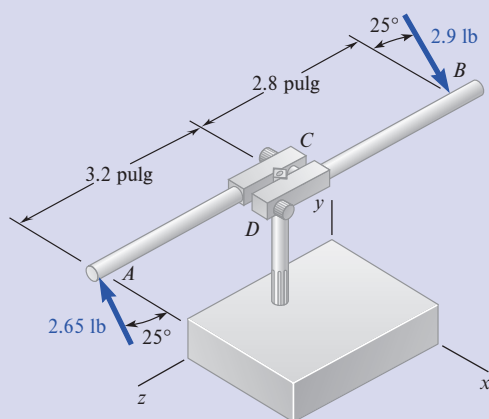


Figura P3.91

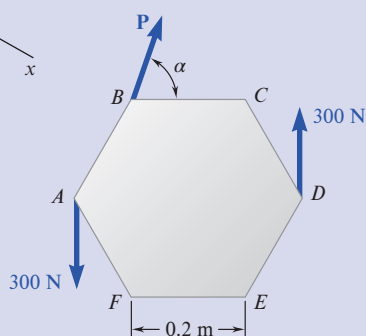


Figura P3.92

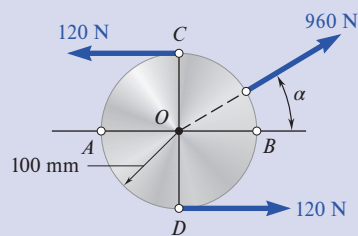


Figura P3.88

ubicado a) sobre la línea AB , b) sobre la línea CD . En cada caso, determine la distancia desde el centro O hasta el punto de aplicación de la fuerza.

3.89 Tres varillas de control unidas a la palanca ABC ejercen sobre esta las fuerzas mostradas en la figura. a) Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en B . b) Determine la fuerza única equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso a) y especifique su punto de aplicación sobre la palanca.

3.90 La fuerza y el par mostrados en la figura actúan sobre una placa rectangular. Este sistema debe reemplazarse con una fuerza única equivalente. a) Para $\alpha = 40^\circ$, especifique la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. b) Especifique el valor de α si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersectar la línea CD 300 mm a la derecha de D .

3.91 En el proceso de roscado de un orificio, un trabajador aplica a la palanca del maneral las fuerzas horizontales mostradas en la figura. Demuestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza resultante y determine, si es posible, el punto de aplicación de la fuerza sobre la palanca.

3.92 Una placa hexagonal está sometida a la fuerza P y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza mínima P con la que este sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en E .

3.93 Reemplace la fuerza P de 250 kN con un sistema equivalente fuerza-par en G .

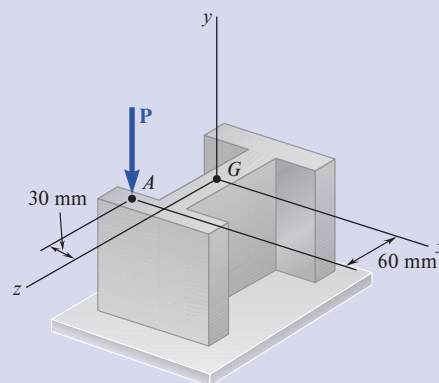


Figura P3.93

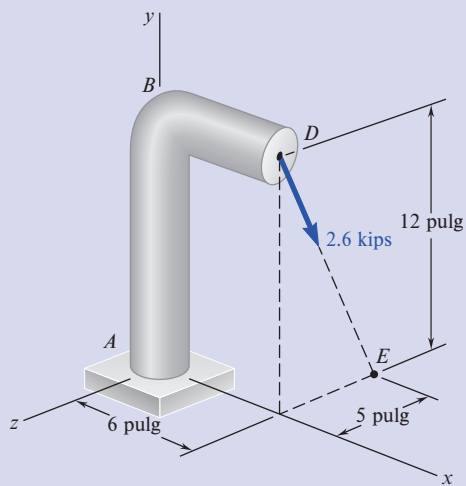


Figura P3.94

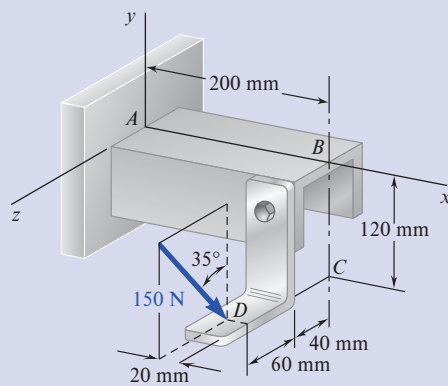


Figura P3.95

- 3.94** Se aplica una fuerza de 2.6 kips en el punto D de un poste de hierro fundido como se muestra en la figura. Reemplace la fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el centro A de la sección que sirve como base.
- 3.95** Reemplace la fuerza de 150 N por un sistema equivalente fuerza-par en A .
- 3.96** Para mantener cerrada una puerta se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla del cerrojo de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 175 N y está dirigida a lo largo de la línea AB . Reemplace esta fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en C .
- 3.97** Se aplican una fuerza F de 46 lb y un par M de 2 120 lb-pulg sobre la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado por un sistema equivalente fuerza-par en la esquina H .

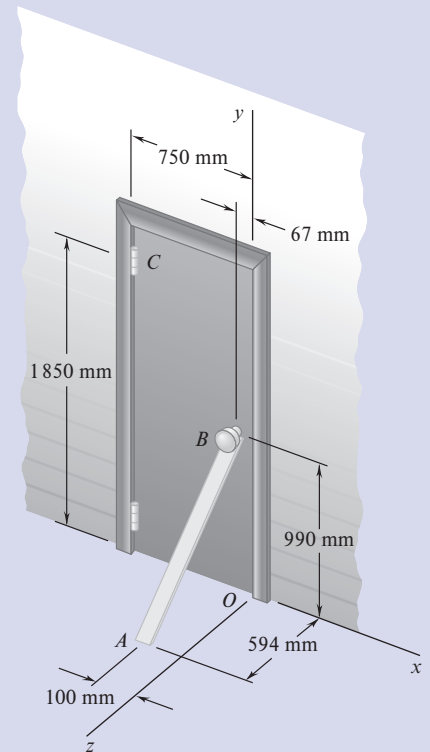


Figura P3.96

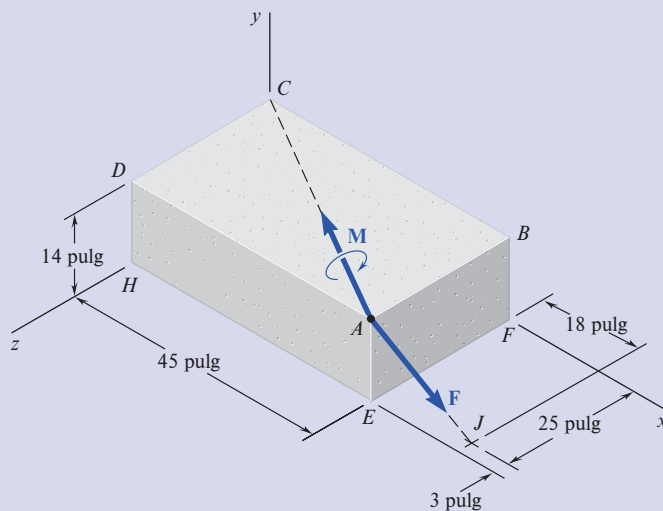


Figura P3.97

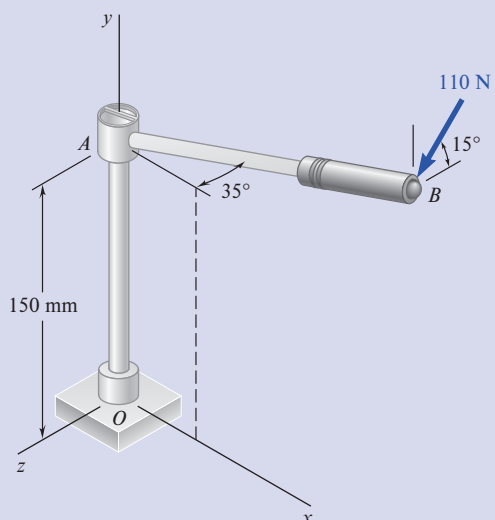


Figura P3.98

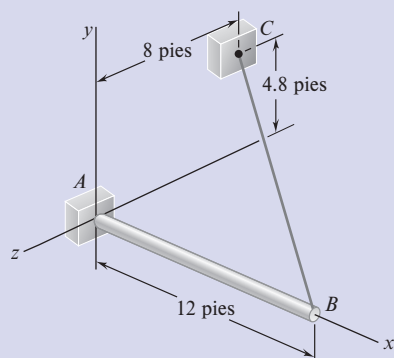


Figura P3.99

3.98 Se aplica una fuerza de 110 N, que actúa en un plano vertical paralelo al plano yz , a una manija horizontal AB de 220 mm de longitud de una llave de torsión. Reemplace la fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en el origen O del sistema coordenado.

3.99 El aguilón AB de 12 pies tiene un extremo fijo A y la tensión en el cable BC es de 570 lb. Reemplace la fuerza que ejerce el cable en B con un sistema fuerza-par equivalente en A .

3.100 La grúa giratoria que se muestra en la figura está orientada de modo que su aguilón AD sea paralelo al eje x y se utilice para mover una caja pesada. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 2.6 kips, reemplace la fuerza ejercida por el cable en A con un sistema fuerza-par equivalente en el centro O de la base de la grúa.

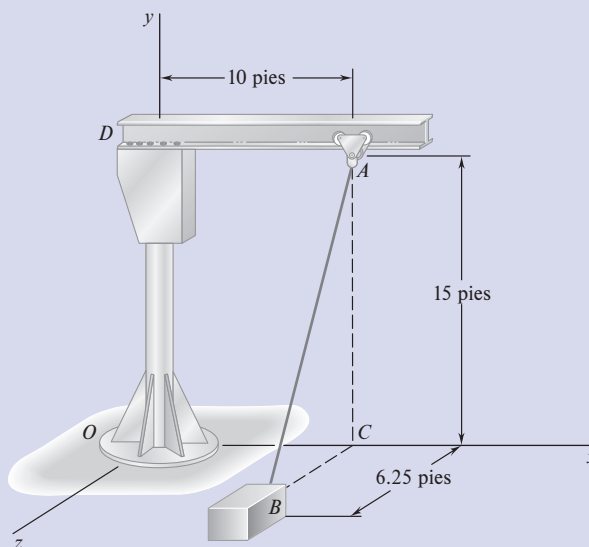


Figura P3.100

3.4 SIMPLIFICACIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

Se ha estudiado en la sección anterior que se puede reemplazar una fuerza en un cuerpo rígido con un sistema fuerza-par que será más sencillo de analizar. Sin embargo, el verdadero valor de este último es que se puede utilizar para reemplazar no solo una fuerza sino un sistema de fuerzas, lo que simplificará el análisis y los cálculos.

3.4A Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos $A_1, A_2, A_3, \dots$, definidos por los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, etc. (figura

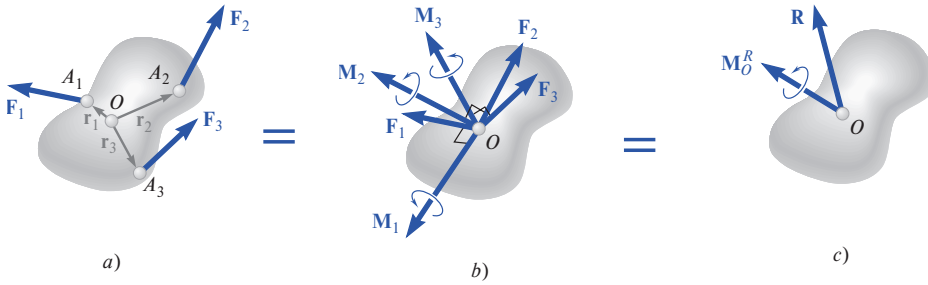


Figura 3.36 Reducir un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par. a) Sistema de fuerzas inicial; b) fuerzas trasladadas que actúan sobre el punto O , con sus vectores de par correspondientes; c) todas las fuerzas se reducen a un vector de fuerza resultante y todos los vectores de par se reducen a un vector de par resultante.

3.36a). Como se vio en la sección anterior, F_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O si se agrega un par de momento M_1 , igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de F_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento con $F_2, F_3, \dots$, se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.36b), que consta de las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante $\mathbf{R}$. De modo similar, los vectores de par $M_1, M_2, M_3, \dots$ pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par M_O^R . Por tanto,

cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O .

Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $M_1, M_2, M_3, \dots$, en la figura 3.36b) es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general, la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante M_O^R en la figura 3.36c) no serán perpendiculares entre sí.

El sistema equivalente fuerza-par está definido por

Sistema fuerza-par

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad M_O^R = \Sigma M_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.50)$$

Estas ecuaciones expresan que la fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante M_O^R , denominado **momento resultante** del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O .

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúan en el punto O , dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O' . Mientras que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $M_{O'}^R$ será igual a la suma de M_O^R y el momento con respecto a O' de la fuerza $\mathbf{R}$ unida a O (figura 3.37). Entonces se tiene

$$M_{O'}^R = M_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \quad (3.51)$$

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza $\mathbf{R}$ actuando en O y un vector de par M_O^R será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector $\mathbf{r}$ y cada fuerza $\mathbf{F}$ del sistema en sus componentes rectangulares se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.53)$$

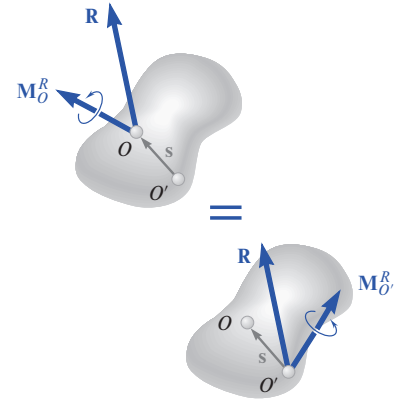


Figura 3.37 Una vez que se ha reducido un sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par sobre un punto, se puede reemplazar con un sistema fuerza-par equivalente en otro punto. La fuerza resultante permanece igual, pero se debe sumar el momento de la fuerza resultante con respecto al nuevo punto al vector de par resultante.

Al sustituir $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ en la ecuación (3.50) y factorizar a los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se obtiene la siguiente expresión para $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} \quad \mathbf{M}_O^R = M_x^R \mathbf{i} + M_y^R \mathbf{j} + M_z^R \mathbf{k} \quad (3.54)$$

Las componentes R_x , R_y y R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x , y y z de las fuerzas dadas, y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x , y o z . Asimismo, las componentes M_x^R , M_y^R y M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x , y y z , y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x , y o z .

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{R}$, estas se pueden obtener a partir de las componentes R_x , R_y y R_z por medio de las relaciones en las ecuaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.4A; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par $\mathbf{M}_O^R$.

3.4B Sistemas equivalentes y equipolentes de fuerzas

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O . Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido.

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O .

Recuérdese que el sistema fuerza-par en O se define por medio de las relaciones de la ecuación (3.50). Por tanto, se puede establecer que

Dos sistemas de fuerzas $F_1, F_2, F_3, \dots$, y $F'_1, F'_2, F'_3, \dots$, que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si y solo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales.

Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes:

Condiciones para sistemas equivalentes de fuerzas

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.55)$$

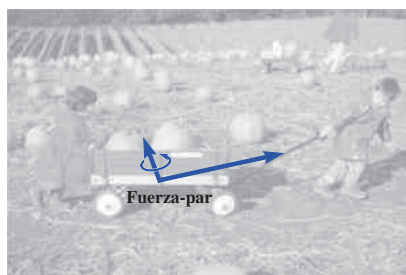
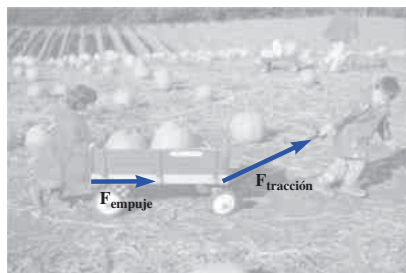
Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones en la ecuación (3.55) se debe establecer con respecto a *un solo punto* O . Sin embargo, esta se cumplirá con respecto a *cualquier punto* si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de las ecuaciones (3.55) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \quad (3.56)$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que

dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido
1) la misma traslación en las direcciones de x , y y z , y 2) la misma rotación respecto de los ejes x , y y z , respectivamente.



Fotografía 3.3 Las fuerzas ejercidas por los niños sobre el vagón se pueden reemplazar al analizar el movimiento del vagón.

En general, cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.55) o (3.56), esto es, cuando sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, respectivamente, se dice que los dos sistemas son **equipolentes**. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer se puede enunciar como sigue:

si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a *cualquier* sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que *no* forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no son equivalentes*.

3.4C Otras reducciones de un sistema de fuerzas

Se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O , que consta de una fuerza $\mathbf{R}$ igual a la suma de fuerzas del sistema y de un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $\mathbf{R} = 0$ el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par $\mathbf{M}_O^R$. Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de **par resultante** del sistema.

¿Cuáles son las condiciones para que un sistema dado de fuerzas pueda reducirse a una sola fuerza? A partir de la sección anterior se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o *resultante* son aquellos sistemas para los cuales la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares. Aunque, en general, esta condición *no se cumplirá* para sistemas de fuerzas en el espacio, *sí se cumplirá* para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las **fuerzas concurrentes** están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante $\mathbf{R}$. Por consiguiente, estas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las **fuerzas coplanares** actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.38a). La suma $\mathbf{R}$ de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto a O y, por consiguiente, el momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y por un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que son mutuamente perpendiculares (figura 3.38b).[†] Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza $\mathbf{R}$, moviendo $\mathbf{R}$ en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. La distancia desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{R}$ es $d = \mathbf{M}_O^R/R$ (figura 3.38c).

Como se señaló con anterioridad, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes

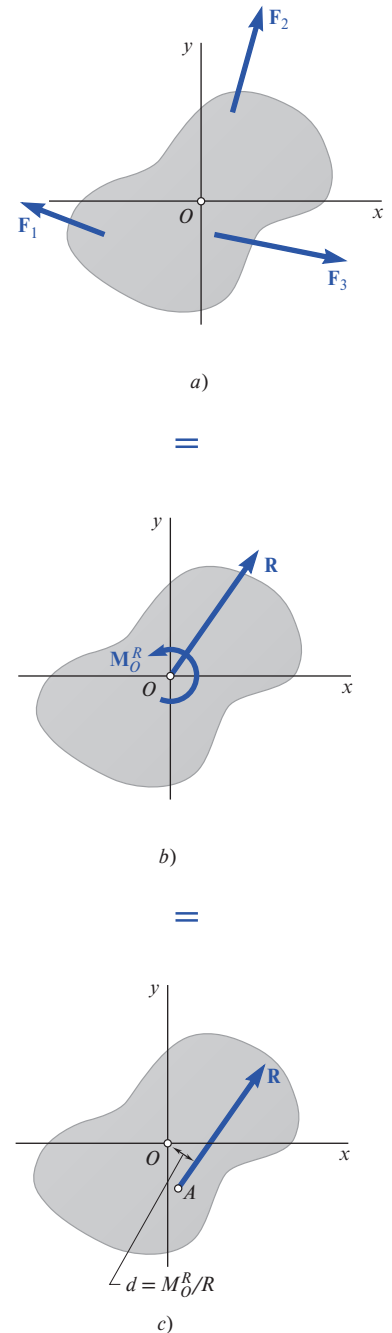


Figura 3.38 Reducir un sistema de fuerzas coplanares. a) Sistema inicial de fuerzas; b) sistema equivalente fuerza-par en O ; c) trasladar la resultante a un punto A para que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual al vector de par.

[†] Como el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ es perpendicular al plano de la figura, este se ha representado por el símbolo $\odot$. Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj $\odot$ representa a un vector que apunta hacia afuera del plano de la página y un par con el sentido de las manecillas del reloj $\ominus$ representa a un vector que apunta hacia adentro del plano de la página.

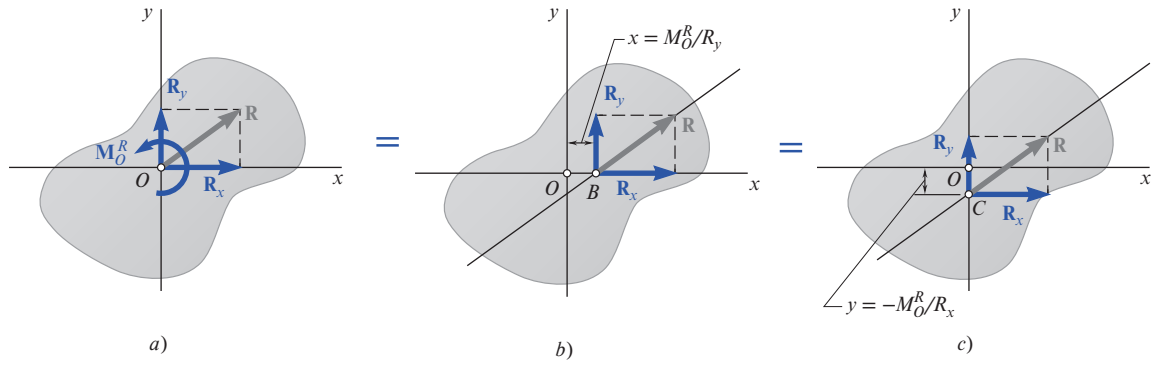


Figura 3.39 Reducir un sistema de fuerzas coplanares usando componentes rectangulares. a) De la figura 3.38b), descomponer la resultante en sus componentes sobre los ejes x y y ; b) determinar la intersección en x de la línea de acción final de la resultante; c) determinar la intersección en y de la línea de acción final de la resultante.

rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes (figura 3.39a)

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad M_O^R = M_O^R = \Sigma M_O \quad (3.57)$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza $\mathbf{R}$ se expresa que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O debe ser igual a M_O^R . Si denotamos las coordenadas del punto de aplicación de la resultante por x y y , y aplicamos la ecuación (3.22) de la sección 3.1F, se tiene

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

Esta representa la ecuación de la línea de acción de $\mathbf{R}$. También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante; se observa que M_O^R debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de $\mathbf{R}$ cuando $\mathbf{R}$ está unida a B (figura 3.39b) e igual también al momento de la componente x cuando $\mathbf{R}$ está unida a C (figura 3.39c).

3. Las **fuerzas paralelas** tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje y (figura 3.40a); se observa que su suma $\mathbf{R}$ también será paralela al eje y . Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante M_O^R estará en el plano zx . De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par M_O^R mutuamente perpendiculares (figura 3.40b). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza $\mathbf{R}$ (figura 3.40c) o, si $\mathbf{R} = 0$, a un solo par cuyo momento sea igual a M_O^R .

En la práctica, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \quad M_x^R = \Sigma M_x \quad M_z^R = \Sigma M_z \quad (3.58)$$



Fotografía 3.4 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

©Images-USA/Alamy Stock Photo

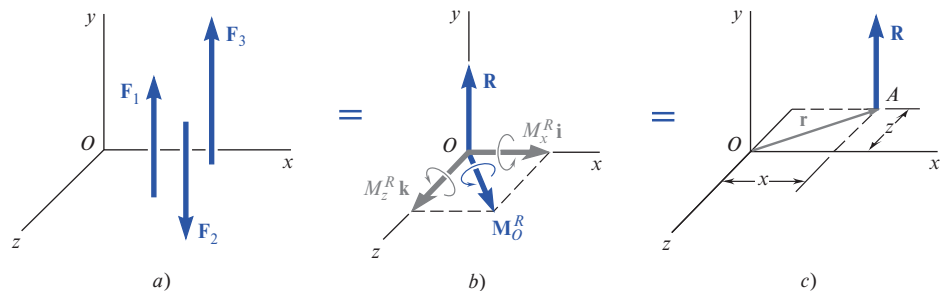


Figura 3.40 Reducir un sistema de fuerzas paralelas. a) Sistema de fuerzas inicial; b) sistema equivalente fuerza-par en O , descompuesto en sus componentes; c) trasladar $\mathbf{R}$ al punto A , escogido para que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual al movimiento resultante con respecto a O .

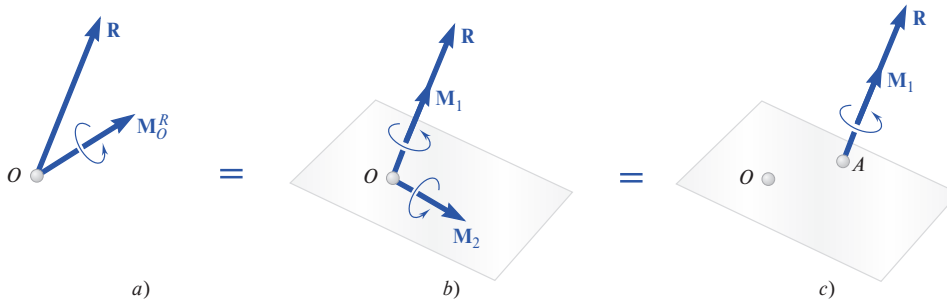


Figura 3.41 Reducir un sistema de fuerzas a una llave de torsión. a) Sistema de fuerzas general reducido a una sola fuerza y un vector de par, que no son perpendiculares entre sí; b) descomponer el vector de par en sus componentes sobre la línea de acción de la fuerza y perpendicular a la misma; c) trasladar la fuerza y el vector de par colineal (la llave de torsión) para eliminar el vector de par perpendicular a la fuerza.

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo $\mathbf{R}$ a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$, el cual se escribe

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(xi + zk) \times R_y \mathbf{j} = M_x^R \mathbf{i} + M_z^R \mathbf{k}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de A :

$$-zR_y = M_x^R \quad \text{y} \quad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de $\mathbf{R}$ con respecto a los ejes x y z deben ser iguales a M_x^R y M_z^R , respectivamente.

*3.4D Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

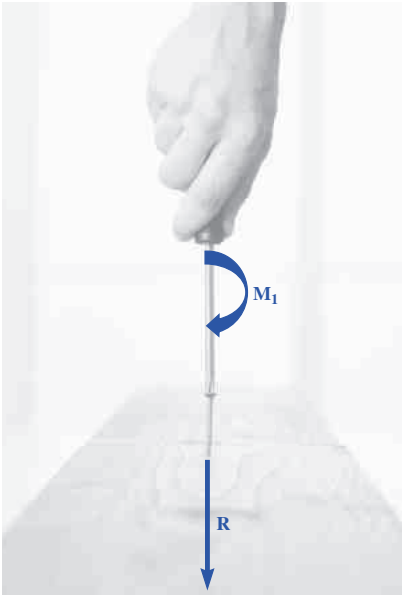
En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que no son perpendiculares entre sí y que son ambos distintos de cero (figura 3.41a). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, existe una manera de simplificar aún más este sistema.

El método de simplificación consiste en, primero, reemplazar el vector de par por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer $\mathbf{M}_O^R$ en una componente $\mathbf{M}_1$ a lo largo de $\mathbf{R}$ y una componente $\mathbf{M}_2$ en un plano perpendicular a $\mathbf{R}$ (figura 3.41b). Entonces, el vector de par $\mathbf{M}_2$ y la fuerza $\mathbf{R}$ pueden reemplazarse por una sola fuerza $\mathbf{R}$ que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a $\mathbf{R}$ y al vector de par $\mathbf{M}_1$ (figura 3.41c); es decir, se reduce a $\mathbf{R}$ y a un par que actúa en el plano perpendicular a $\mathbf{R}$.

A este sistema fuerza-par, en particular, se le conoce como **llave de torsión** debido a que la combinación resultante de empuje y torsión es la misma que produciría una llave de torsión real. A la línea de acción de $\mathbf{R}$ se le conoce como *eje de la llave de torsión*, y a la razón $p = M_1/R$ se le denomina *paso de la llave de torsión*. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \quad (3.59)$$

Recuerde la expresión de la ecuación (3.33) para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector. Utilizando esta ecuación se observa que la proyección de $\mathbf{M}_O^R$ sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ es igual a



Fotografía 3.5 La acción de empujar y girar, asociada con la operación de apretar un tornillo, ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o tursor. ©Westend61/Getty Images

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como[†]

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.60)$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_1$ en P (figura 3.42) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.61)$$

De manera alternativa, de acuerdo con la ecuación (3.59), se obtiene

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.62)$$

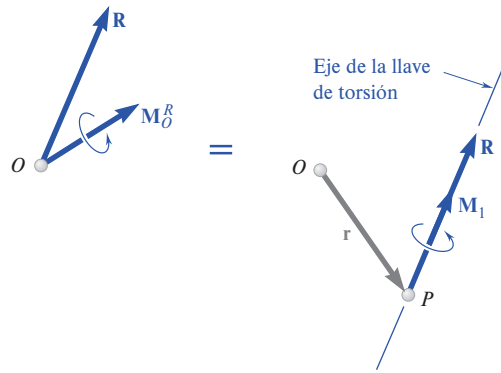


Figura 3.42 Si se calcula el vector de posición $\mathbf{r}$ que localiza cualquier punto arbitrario sobre el eje de la llave de torsión puede definir el eje.

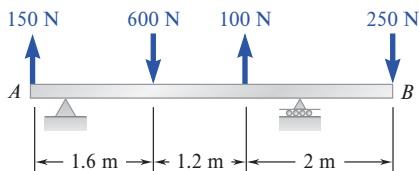
[†] Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de $\mathbf{R}$ y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O . Utilizando la relación (3.51) de la sección 3.4A se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O' , el numerador en (3.60) habría sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto mixto $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O .



Problema modelo 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a a) un sistema equivalente fuerza-par en A, b) un sistema equivalente fuerza-par en B y c) una sola fuerza o resultante. *Nota:* Como las reacciones en los apoyos no están

(continúa)

incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.

ESTRATEGIA: La parte que representa la *fuerza* de un sistema fuerza-par equivalente es simplemente la suma de las fuerzas involucradas. La parte que representa el *par* es la suma de los momentos causados por cada fuerza con respecto al punto de interés. Una vez que se halla la fuerza-par equivalente en un punto se le puede trasladar a cualquier otro punto con solo calcular el momento.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Sistema fuerza-par en A. El sistema fuerza-par en A equivalente al sistema de fuerzas dado y consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R$ definidos como sigue (figura 1):

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (150 \text{ N})\mathbf{j} - (600 \text{ N})\mathbf{j} + (100 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{j} = -(600 \text{ N})\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\ &= -(1\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en A está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_A^R = 1\,880 \text{ N}\cdot\text{m} \curvearrowright \quad \blacktriangleleft$$

b) Sistema fuerza-par en B. Se pretende encontrar un sistema fuerza-par en B equivalente al sistema fuerza-par en A determinado en el inciso a). La fuerza $\mathbf{R}$ permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par $\mathbf{M}_B^R$ cuyo momento sea igual al momento con respecto a B del sistema fuerza-par encontrado en el inciso a) (figura 2). Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{R} \\ &= -(1\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (-4.8 \text{ m})\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(1\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} + (2\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} = +(1\,000 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en B está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_B^R = 1\,000 \text{ N}\cdot\text{m} \curvearrowright \quad \blacktriangleleft$$

c) Fuerza única o resultante. La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a $\mathbf{R}$, y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$ (figura 3). Esta igualdad de momentos hace que

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\ x\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \\ -x(600 \text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Al resolver x se concluye que $x = 3.13 \text{ m}$. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad x = 3.13 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Esta reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza equivalente emplea el mismo principio que se utilizará más adelante para calcular centros de gravedad y centros de masa, que son parámetros importantes dentro de la ingeniería mecánica.

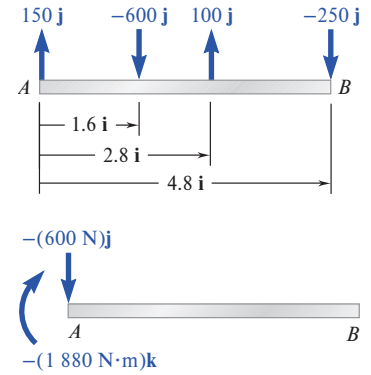


Figura 1 Sistema fuerza-par en A que es equivalente a un sistema de fuerzas dado.

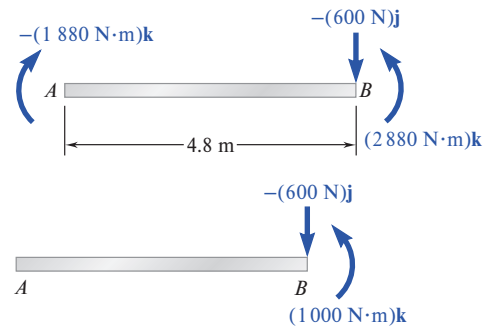


Figura 2 Encontrar un sistema fuerza-par en B equivalente al determinado en el inciso a).

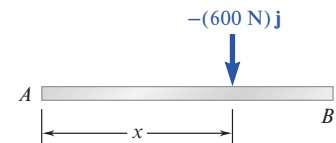


Figura 3 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

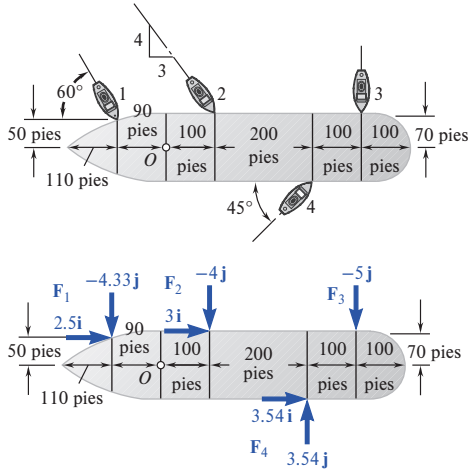


Figura 1 Fuerzas dadas descompuestas en sus componentes.

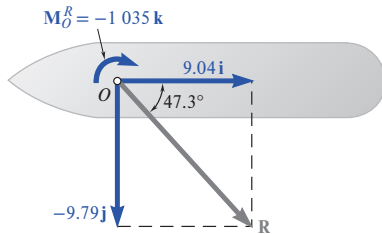


Figura 2 Sistema equivalente fuerza-par en O .

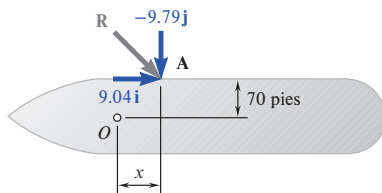


Figura 3 Punto de aplicación del remolcador único para crear el mismo efecto que el sistema de fuerzas dado.

Problema modelo 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un transatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine *a*) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O y *b*) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

ESTRATEGIA: El sistema fuerza-par se define como la suma de las fuerzas dadas y la suma de los momentos de esas fuerzas en un punto en particular. Un solo remolcador podría producir este sistema al ejercer la fuerza resultante en un punto de aplicación que produzca un momento equivalente.

MODELAR y ANALIZAR:

a) Sistema fuerza-par en O . Cada una de las fuerzas se debe descomponer en sus componentes, como aparece en la figura 1 (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en O equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y de un par $\mathbf{M}_O^R$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) \\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k} \\ &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en O está dado por (figura 2)

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips}\cdot\text{pie})\mathbf{k}$$

o

$$\mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \searrow 47.3^\circ \quad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips}\cdot\text{pie} \curvearrowleft$$

Comentario: Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta O y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo, según el sentido del momento.

b) Remolcador único. La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a $\mathbf{R}$, y su punto de aplicación A debe ser tal que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$ (figura 3). Si se observa que el vector de posición de A es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k} \\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$x = 41.1 \text{ pies} \quad \blacktriangleleft$$

(continúa)

REVISAR y PENSAR: Reducir la situación dada a la de una sola fuerza facilita la visualización del efecto general que tienen los remolcadores al trasladar el transatlántico. Sin embargo, en términos prácticos, contar con cuatro remolcadores ejerciendo fuerza permite un mayor control para detener o virar una embarcación de gran porte en un muelle abarrotado.

Problema modelo 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A .

ESTRATEGIA: Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Luego, se suman las fuerzas y momentos.

MODELAR y ANALIZAR: Obsérvese que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BE}$ donde

$$\lambda_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Si se utilizan metros y newtons, la posición y los vectores de fuerza son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} &= 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} &= 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{D/A} = \overrightarrow{AD} &= 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1\,039\mathbf{j}\end{aligned}$$

El sistema fuerza-par en A , equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza $\mathbf{R}$ se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x , y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1\,607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

El cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.1F). Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} & -45\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1\,039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k}\end{aligned}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas se tiene

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (118.9 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

(continúa)

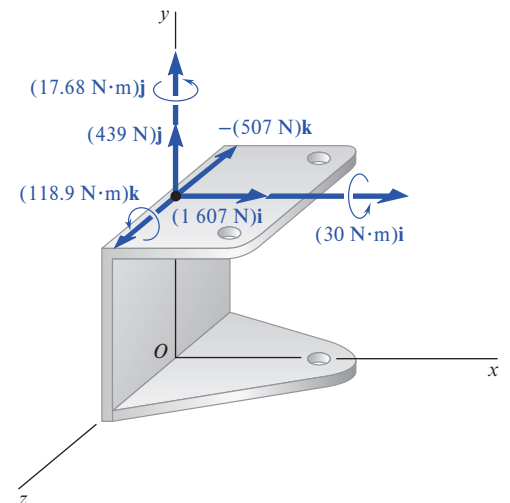
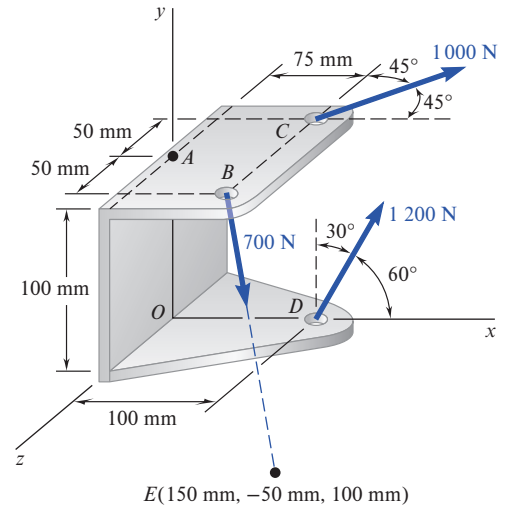


Figura 1 Componentes rectangulares de un sistema equivalente fuerza-par en A .

Las componentes rectangulares de la fuerza $\mathbf{R}$ y del par $\mathbf{M}_O^R$ se muestran en la figura 1.

REVISAR y PENSAR: La ventaja de aplicar el enfoque de determinantes para calcular momentos es evidente en un problema tridimensional general como este.

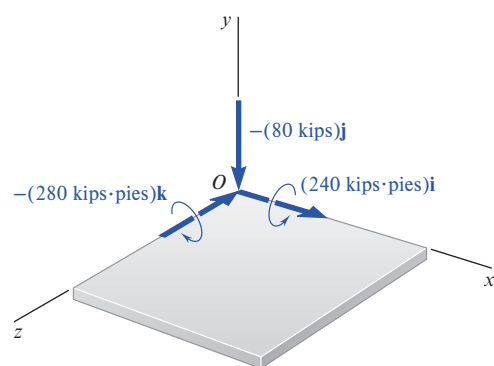
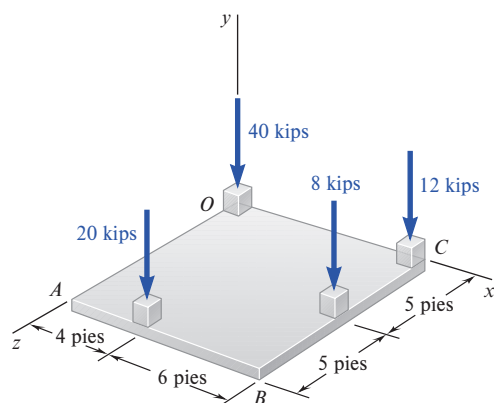


Figura 1 Sistema fuerza-par en O que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

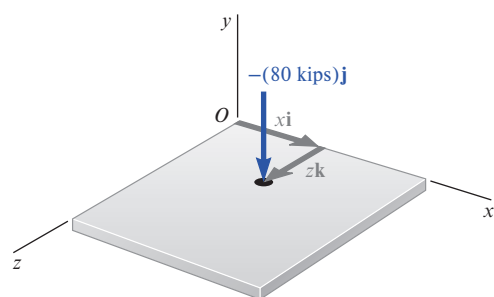


Figura 2 Fuerza única que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

Problema modelo 3.11

Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

ESTRATEGIA: Para comenzar, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen O del sistema de coordenadas. Luego, se reduce el sistema aún más a una sola fuerza aplicada sobre un punto con coordenadas x, z .

MODELAR: Este sistema fuerza-par consta de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_O^R$ que se definen de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

ANALIZAR: Después de determinar los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas, resulta conveniente arreglar los cálculos en forma tabular. Se muestran los resultados en la figura 1.

$\mathbf{r}$, pies	$\mathbf{F}$, kips	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kip-pie
0	$-40\mathbf{j}$	0
$10\mathbf{i}$	$-12\mathbf{j}$	$-120\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$	$-8\mathbf{j}$	$40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$	$-20\mathbf{j}$	$200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$		$\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$

Como la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza $\mathbf{R}$. El nuevo punto de aplicación de $\mathbf{R}$ será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de $\mathbf{R}$ con respecto a O sea igual a $\mathbf{M}_O^R$. Si se representa con $\mathbf{r}$ al vector de posición del punto de aplicación deseado, y con x y z a sus coordenadas, se escribe (figura 2).

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (xi + zk) \times (-80j) &= 240i - 280k \\ -80xk + 80zi &= 240i - 280k \end{aligned}$$

Se encuentra que

$$\begin{aligned} -80x &= -280 & 80z &= 240 \\ x &= 3.50 \text{ pies} & z &= 3.00 \text{ pies} \end{aligned}$$

(continúa)

La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \quad \text{en } x = 3.50 \text{ pies, } z = 3.00 \text{ pies} \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: Mediante un examen visual de las magnitudes relativas y las posiciones de las cuatro fuerzas originales es razonable esperar que su resultante esté más cerca de O que de B , lo cual es consistente con el resultado obtenido.

Problema modelo 3.12

Dos fuerzas de la misma magnitud P actúan sobre un cubo con lados a , como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine a) la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz .

ESTRATEGIA: El primer paso es determinar el sistema fuerza-par en el origen O . Luego, se puede reducir este sistema a una llave de torsión y determinar sus propiedades.

MODELAR y ANALIZAR:

Sistema equivalente fuerza-par en O . Los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante $\mathbf{R}$ de las dos fuerzas y su momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ con respecto a O están dados por (figura 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ \mathbf{M}_O^R &= \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} \\ &= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

a) Fuerza resultante $\mathbf{R}$. A partir de la ecuación (1) y de la figura 1 se concluye que la fuerza resultante $\mathbf{R}$ tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y . Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \quad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \quad \theta_z = 90^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b) Paso de la llave de torsión. De acuerdo con la fórmula (3.60) de la sección 3.4D, y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, el paso p de la llave de torsión es

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \quad p = -\frac{a}{2} \quad \blacktriangleleft$$

c) Eje de la llave de torsión. A partir del paso y de la ecuación (3.59) se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza $\mathbf{R}$ encontrada en la ecuación (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (3)$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz , se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

De manera alternativa, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (figura 2) y sustituir $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$ y $\mathbf{M}_1$ a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene

(continúa)

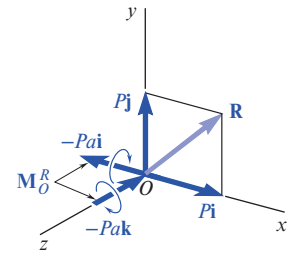
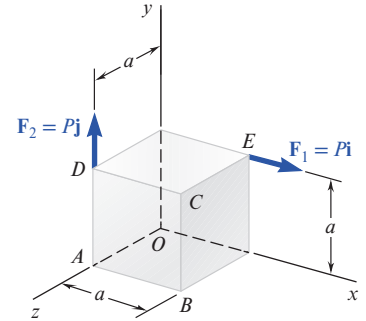


Figura 1 Sistema fuerza-par en O que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

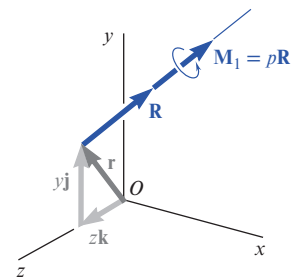


Figura 2 Llave de torsión que es equivalente al sistema de fuerzas dado.

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} = -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k}$$

Si se igualan los coeficientes de $\mathbf{k}$ y después los coeficientes de $\mathbf{j}$ se encuentra que

$$y = a \quad z = a/2 \quad \blacktriangleleft$$

REVISAR y PENSAR: A nivel conceptual, reducir un sistema de fuerzas a una llave de torsión es simplemente una aplicación adicional de la manera de hallar un sistema equivalente fuerza-par.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta sección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A . La fuerza $\mathbf{R}$ es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a A de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición $\mathbf{r}$ se traza desde A hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{F}$.

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B . Si después de haber reducido a un sistema fuerza-par en el punto A se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto B , no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a B . La resultante $\mathbf{R}$ permanece inalterada y el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_B^R$ se puede obtener sumándole a $\mathbf{M}_A^R$ el momento con respecto a B de la fuerza $\mathbf{R}$ aplicada en A (problema modelo 3.8). Si se representa con $\mathbf{s}$ el vector trazado desde B hasta A se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par en el mismo punto arbitrario A (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos; esto es, si

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma \mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante $\mathbf{R}$, estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente A donde dicho sistema consta de la resultante $\mathbf{R}$ y del vector de par $\mathbf{M}_A^R$ (esto se lleva a cabo como se explicó en la primera operación). Se recordará de la sección 3.3E que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *solo si la fuerza $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares*. Con toda seguridad, este será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son *concurrentes, coplanares o paralelas*. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección previa, moviendo $\mathbf{R}$ hasta que su momento con respecto a A sea igual a $\mathbf{M}_A^R$. Con más formalidad la posición del vector $\mathbf{r}$ trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de una sola fuerza $\mathbf{R}$ debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas modelo 3.8, 3.9 y 3.11.

5. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión. Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto A consistirá en una fuerza $\mathbf{R}$ y en un vector de par $\mathbf{M}_A^R$ que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ son mutuamente perpendiculares se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí). Si $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_A^R$ no son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una *llave de torsión* —la combinación de una fuerza $\mathbf{R}$ y un vector de par $\mathbf{M}_1$ que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como *eje de la llave de torsión* (figura 3.42)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión se deben seguir los siguientes pasos:

- a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_O^R$), localizado, comúnmente, en el origen O .
- b) Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.60),

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2}$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

- c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ del sistema fuerza-par en O :

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.61)$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición $\mathbf{r}$ está dirigido desde O hasta dicho punto. Estos pasos se muestran en el problema modelo 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

- 3.101** Una viga de 4 m de longitud se somete a varias cargas. a) Reemplace cada carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo A de la viga. b) ¿Qué cargas son equivalentes?

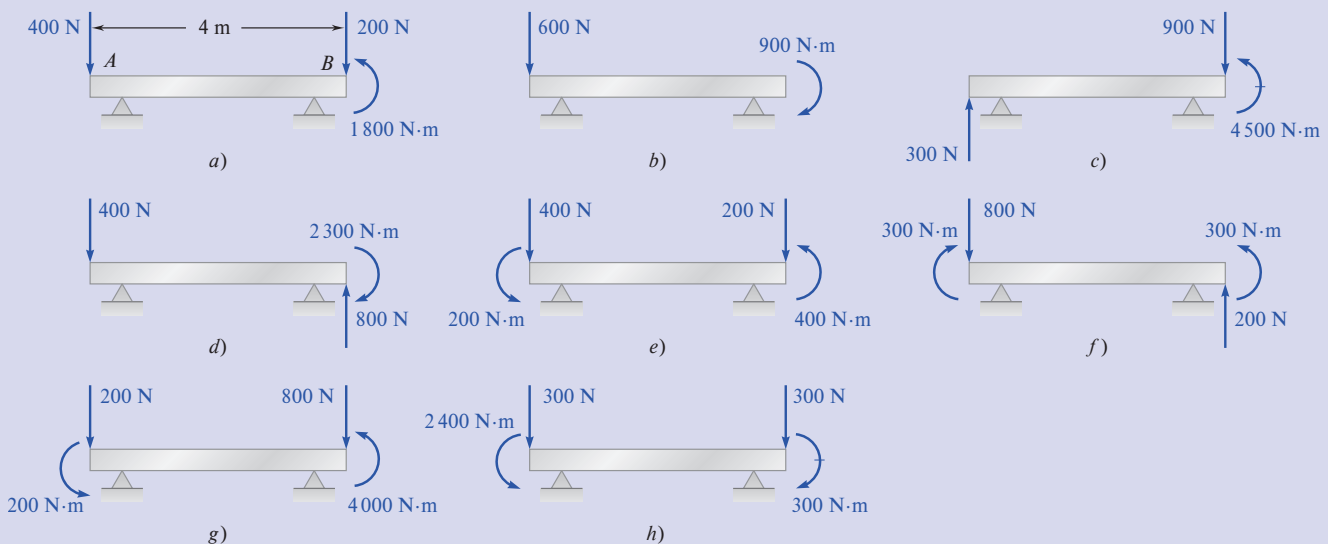


Figura P3.101

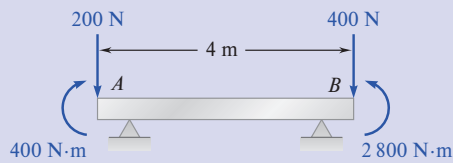


Figura P3.102

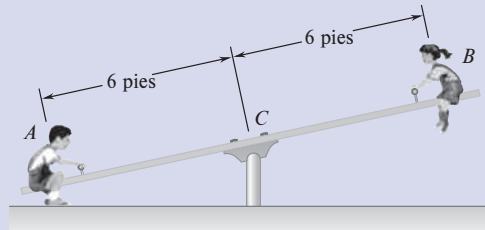


Figura P3.105

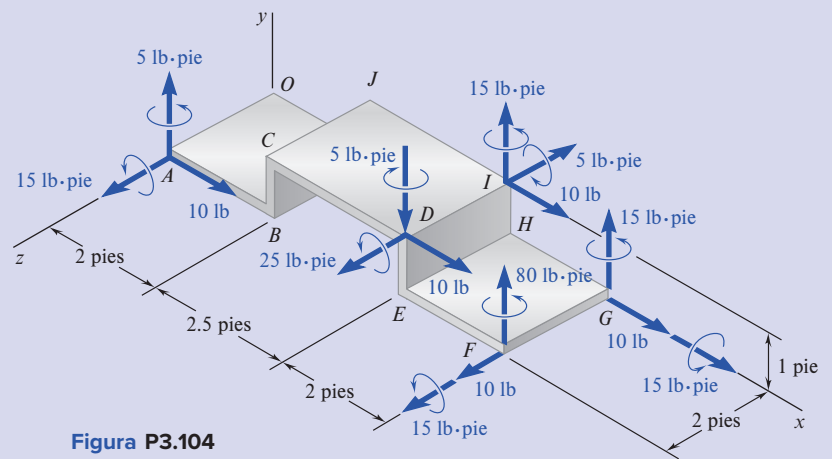


Figura P3.104

- 3.102** Una viga de 4 m de longitud se carga de la forma mostrada en la figura. Determine qué carga del problema 3.101 es equivalente a esta carga.
- 3.103** Determine la fuerza única equivalente y la distancia desde el punto A hasta su línea de acción para la viga y la carga de a) el problema 3.101b, b) el problema 3.101d y c) el problema 3.101e.
- 3.104** Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas de la placa de metal que se ha moldeado en la forma que se muestra en la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a una fuerza $\mathbf{F} = (10 \text{ lb})\mathbf{i}$ y a un par de momento $\mathbf{M} = (15 \text{ lb}\cdot\text{pie})\mathbf{j} + (15 \text{ lb}\cdot\text{pie})\mathbf{k}$ ubicado en el origen.
- 3.105** Los pesos de dos niños sentados en los extremos A y B de un balancín son 84 y 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de los pesos de los tres niños debe pasar por C, y si se sabe que el peso del tercer niño es a) 60 lb y b) 52 lb.
- 3.106** Tres lámparas de escenario se colocan sobre el tubo mostrado en la figura. El peso de las lámparas en A y B es de 4.1 lb, mientras que la lámpara en C pesa 3.5 lb. a) Si $d = 25$ pulg, determine la distancia desde D

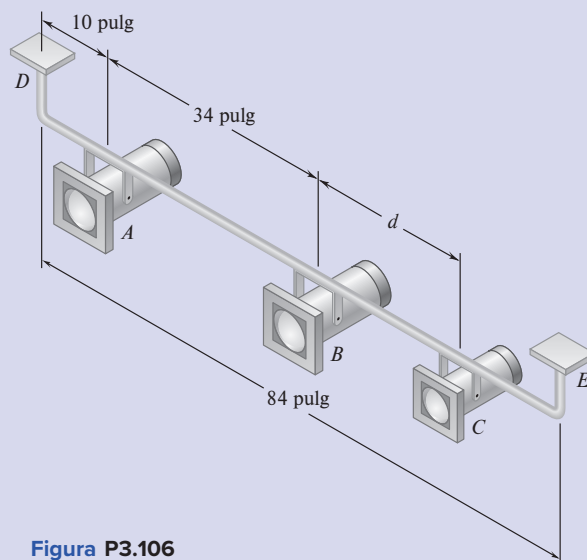


Figura P3.106



Fotografía P3.107

©Alex Potemkin/E+/Getty Images

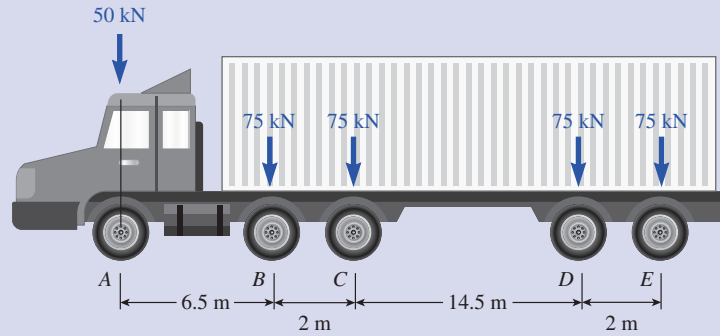


Figura P3.107

hasta la línea de acción de la resultante de los pesos de las tres lámparas. *b)* Determine el valor de d si la resultante de los pesos debe pasar por el punto medio del tubo.

3.107 La fotografía P3.107 muestra un camión que cruza el claro de un puente. Un método para determinar el momento interno máximo que se produciría en este claro debido al paso del camión consiste en sustituir las cargas reales por eje por una única fuerza equivalente. Si las cargas por eje y la separación entre los ejes de este camión son como se muestran en la figura P3.107, determine la magnitud de la fuerza equivalente para estas cargas y su punto de aplicación con respecto al eje A .

3.108 Una placa de 6×12 pulg está sujeta a cuatro cargas, como se muestra en la figura. Encuentre la resultante de las cuatro cargas y los dos puntos donde la línea de acción de la resultante interseca el borde de la placa.

3.109 El engrane C está unido rigidamente al brazo AB . Si las fuerzas y el par que se muestran en la figura se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A , determine la fuerza equivalente y la magnitud del par M .

3.110 Para comprobar la fortaleza de un maletín de 625×500 mm se aplican fuerzas, como se muestra en la figura. Si $P = 88$ N, *a)* determine la resultante de las fuerzas aplicadas, *b)* ubique los dos puntos donde la línea de acción de la resultante interseca el borde del maletín.

3.111 Dos cables ejercen fuerzas de 90 kN cada uno sobre una armadura de peso $W = 200$ kN. Encuentre la resultante de estas tres fuerzas que actúan sobre la armadura y el punto de intersección de su línea de acción con la línea AB .

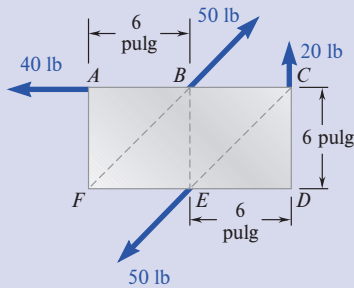


Figura P3.108

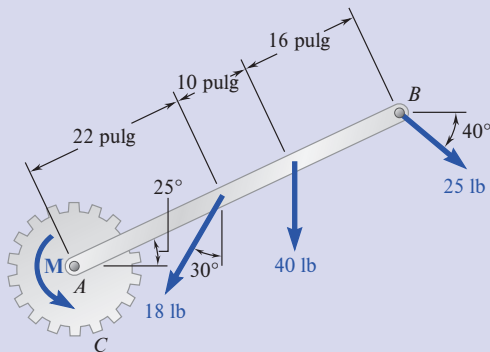


Figura P3.109

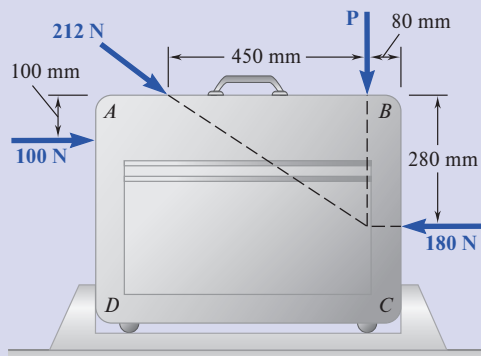


Figura P3.110

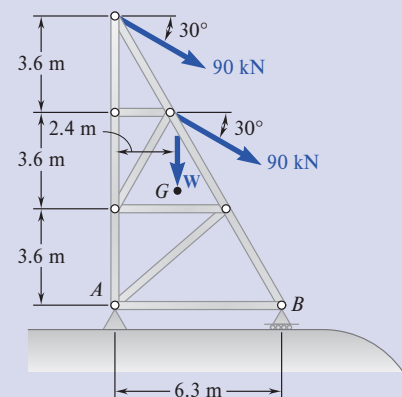


Figura P3.111

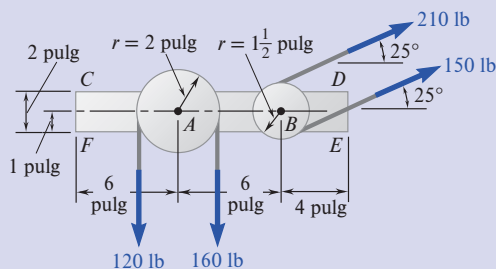


Figura P3.112

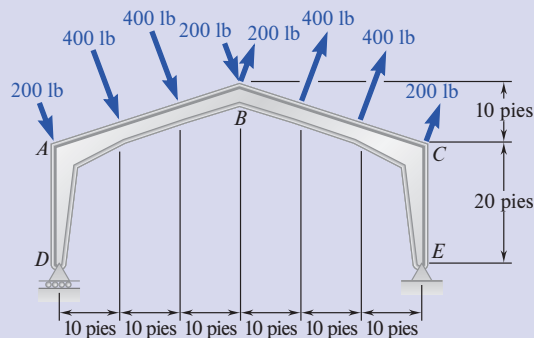


Figura P3.113

3.112 Las poleas A y B están montadas sobre la ménsula $CDEF$. La tensión a cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas con una sola fuerza equivalente y determine dónde su línea de acción interseca el borde inferior de la ménsula.

3.113 El techo de la estructura de un edificio está sujeto a la carga del viento que se muestra en la figura. Determine *a*) el sistema fuerza-par equivalente en D , *b*) la resultante de la carga y su línea de acción.

3.114 Se aplican un par de magnitud $M = 80 \text{ lb}\cdot\text{pulg}$ y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular. *a*) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b*) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca la línea AB y la línea BC .

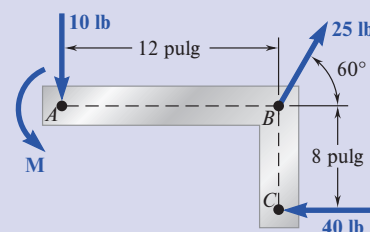


Figura P3.114 y P3.115

3.115 Se aplican un par M y las tres fuerzas mostradas en la figura a una ménsula angular. Encuentre el momento del par si la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas debe pasar a través *a*) del punto A , *b*) del punto B y *c*) del punto C .

3.116 Un componente de máquina se somete a las fuerzas y pares mostrados en la figura. El componente debe mantenerse en su lugar por medio de un solo remache que resiste una fuerza, pero no un par. Con $P = 0$, determine la ubicación del orificio para el remache si este debe localizarse *a*) sobre la línea FG , *b*) sobre la línea GH .

3.117 Resuelva el problema 3.116 con $P = 60 \text{ N}$.

3.118 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C , ejerce una fuerza F constante y perpendicular a la superficie. *a*) Reemplace F por un sistema equivalente fuerza-par en el punto D obtenido al dibujar la perpendicular desde el

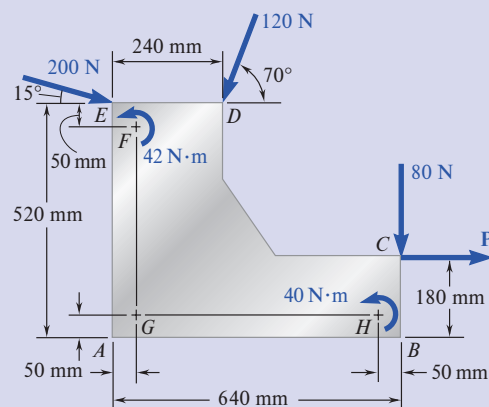


Figura P3.116

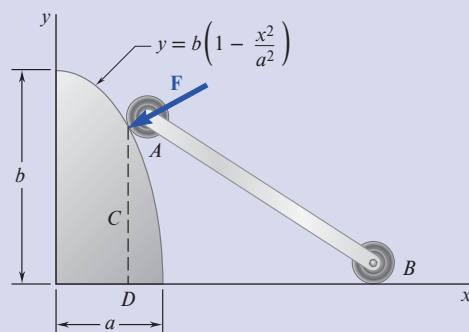


Figura P3.118

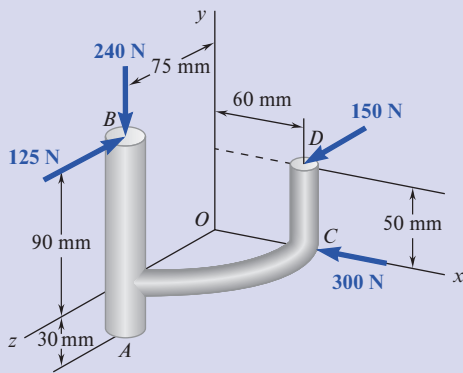


Figura P3.119

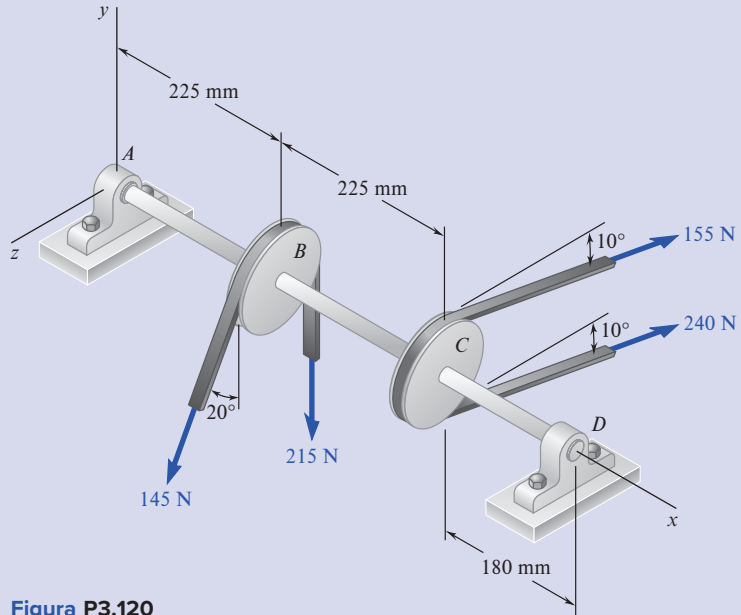


Figura P3.120

punto de contacto hasta el eje x . b) Con $a = 1$ m y $b = 2$ m, determine el valor de x para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en D sea máximo.

- 3.119** Un componente de máquina se somete a las fuerzas mostradas en la figura, siendo cada una de ellas paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace dichas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en A .
- 3.120** Dos poleas de 150 mm de diámetro se montan sobre el eje en línea AD . Las bandas de las poleas B y C están contenidas en planos verticales paralelos al plano yz . Reemplace las fuerzas de las bandas mostradas por un sistema fuerza-par equivalente en A .
- 3.121** Un puntal ajustable BC se utiliza para colocar una pared en posición vertical, en la figura se muestra el sistema fuerza-par que se ejerce sobre la pared. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema equivalente fuerza-par en A si $R = 21.2$ lb y $M = 13.25$ lb-pie.

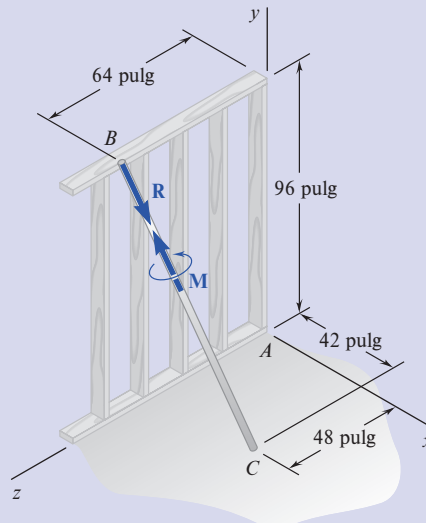


Figura P3.121

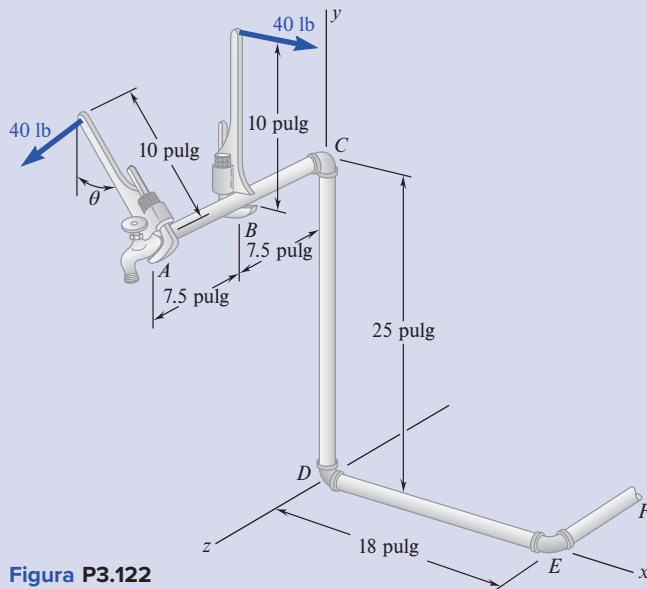


Figura P3.122

3.122 Para desatornillar el grifo roscado *A*, un plomero usa dos llaves de torsión para tubos como se muestra en la figura. Al ejercer una fuerza de 40 lb en cada llave de torsión, a una distancia de 10 pulg desde el eje del tubo y en una dirección perpendicular al tubo y a la llave de torsión, evita que el tubo gire y que la unión entre el tubo y el codo roscado *C* se afloje o apriete. Determine *a*) el ángulo θ que debe formar la llave de torsión en *A* con la vertical si el codo *C* no debe rotar alrededor de la vertical, *b*) el sistema fuerza-par en *C* equivalente a las dos fuerzas de 40 lb cuando se satisfice esta condición.

3.123 En el problema 3.122, suponga que $\theta = 60^\circ$ y reemplace las dos fuerzas de 40 lb por un sistema fuerza-par equivalente en *D* y determine si la acción del plomero tiende a apretar o aflojar la unión entre *a*) el tubo *CD* y el codo *D*, *b*) el codo *D* y el tubo *DE*. Suponga que todas las roscas son derechas.

3.124 Se aplican cuatro fuerzas al componente de maquinaria *ABDE* como se muestra en la figura. Reemplace estas fuerzas por un sistema equivalente fuerza-par en *A*.

3.125 Con un berbiquí de paleta se aprieta un tornillo en *A*. *a*) Determine las fuerzas ejercidas en *B* y *C* si se sabe que dichas fuerzas son equivalentes al sistema equivalente fuerza-par en *A* que consiste en $\mathbf{R} = -(25 \text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{M}_A^R = -(13.5 \text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i}$. *b*) Encuentre los valores correspondientes de R_y y R_z . *c*) ¿Cuál es la orientación de la ranura en la cabeza del tornillo para la cual es menos probable que la paleta se resbale si el berbiquí se encuentra en la posición mostrada?

3.126 Un mecánico usa una llave de torsión “pata de gallo” para aflojar un perno en *C*. El mecánico sostiene el mango de la llave de torsión por los puntos *A* y *B* y

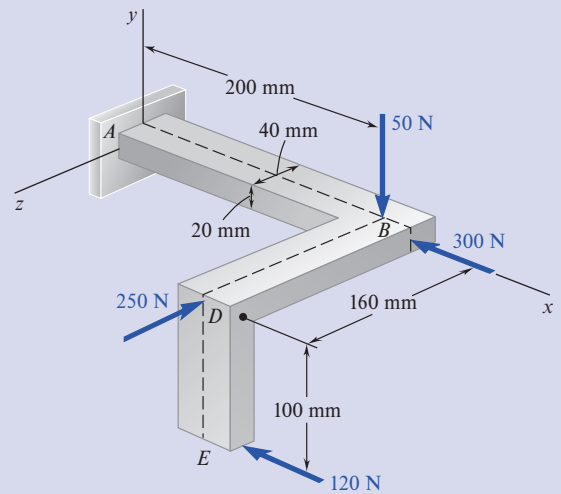


Figura P3.124

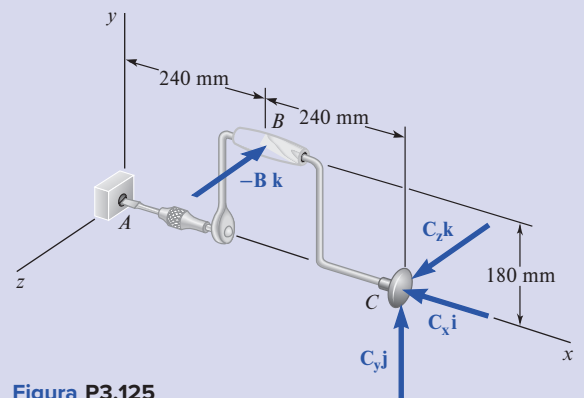


Figura P3.125

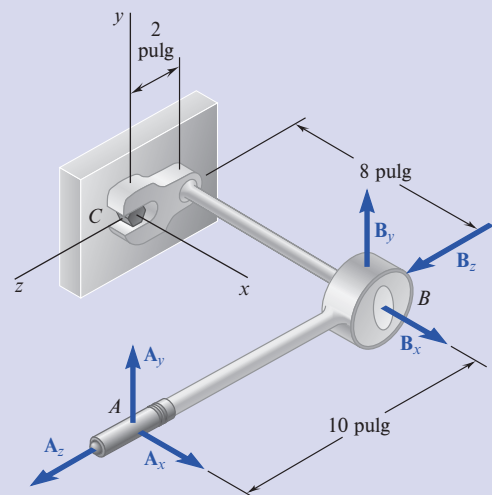


Figura P3.126

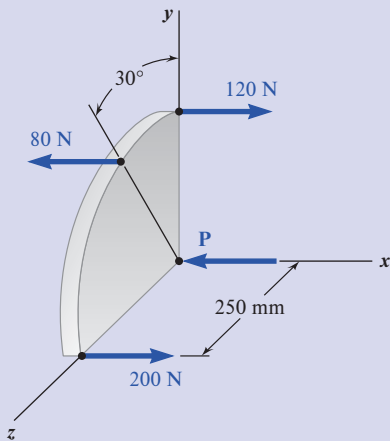


Figura P3.127 y P3.128

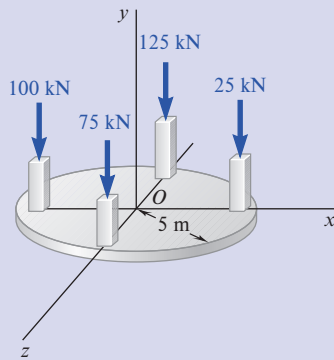


Figura P3.131

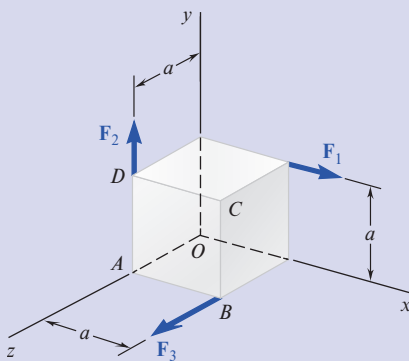


Figura P3.133

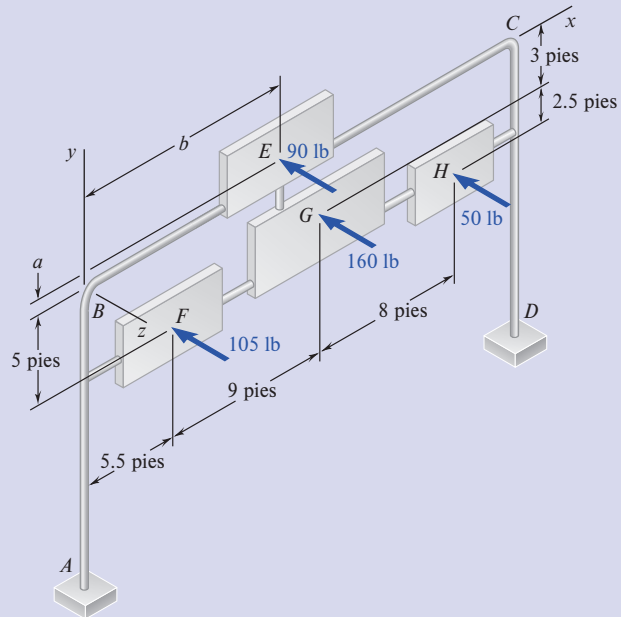


Figura P3.129 y P3.130

aplica fuerzas en estos puntos. Si se sabe que estas fuerzas son equivalentes al sistema fuerza-par en C , que consiste en la fuerza $\mathbf{C} = -(8 \text{ lb})\mathbf{i} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_C = (360 \text{ lb-pulg})\mathbf{i}$, determine las fuerzas aplicadas en A y en B cuando $A_z = 2 \text{ lb}$.

- 3.127** Cuatro fuerzas horizontales actúan sobre una placa vertical con forma de un cuarto de círculo y radio de 250 mm. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas si $P = 40 \text{ N}$.
- 3.128** Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{P}$ para la cual la resultante de las cuatro fuerzas actúa sobre el borde de la placa.
- 3.129** Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera, y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas del viento cuando $a = 1 \text{ pie}$ y $b = 12 \text{ pies}$.
- 3.130** Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la carretera, y las magnitudes de las fuerzas horizontales del viento que actúan sobre las señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en G .
- 3.131** Una losa de cimentación de concreto de 5 m de radio soporta cuatro columnas a igual distancia, ubicadas cada una a 4 m del centro de la losa. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.
- 3.132** Determine la magnitud y el punto de aplicación de la carga adicional mínima que debe aplicarse a la losa de cimentación del problema 3.131 si la resultante de las cinco cargas debe pasar a través del centro de la losa.
- *3.133** Un cubo de lado a está sometido a tres fuerzas de la misma magnitud P como se muestra en la figura. Reemplace las tres fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine a) la magnitud y la dirección de la fuerza

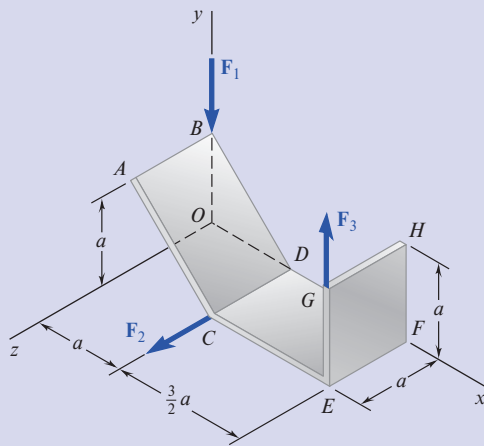


Figura P3.134

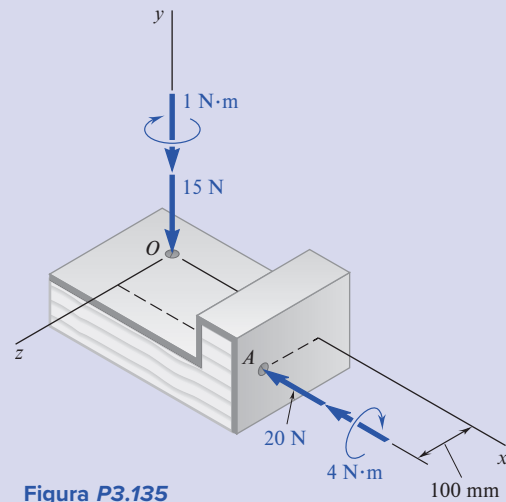


Figura P3.135

resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el eje de la llave de torsión.

***3.134** Una pieza de metal laminado está sometida a tres fuerzas y doblada como se muestra en la figura. Si las fuerzas tienen la misma magnitud P , reemplázalas por una llave de torsión equivalente y determine a) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el eje de la llave de torsión.

***3.135 y *3.136** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos mediante los que se sujeta una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente y determine a) la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano xz .

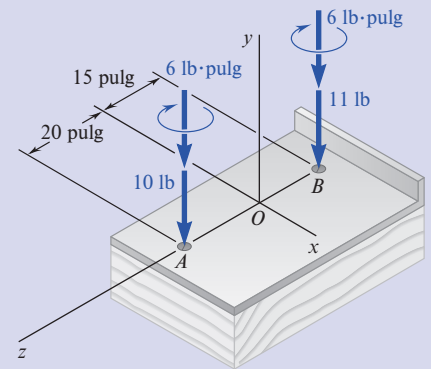


Figura P3.136

***3.137 y *3.138** Dos pernos A y B se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente y determine a) la resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión equivalente y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano xz .

***3.139** Con dos cuerdas atadas en A y B se mueve el tronco de un árbol caído. Reemplace las fuerzas ejercidas por las cuerdas con una sola

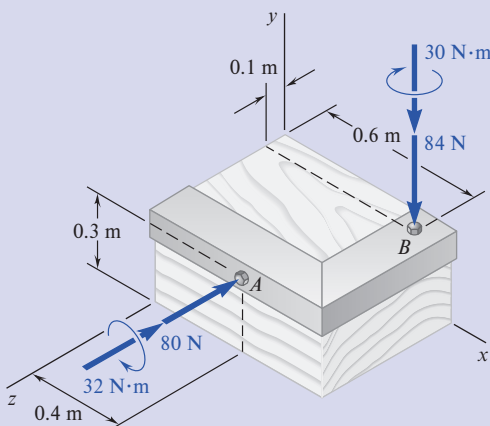


Figura P3.137

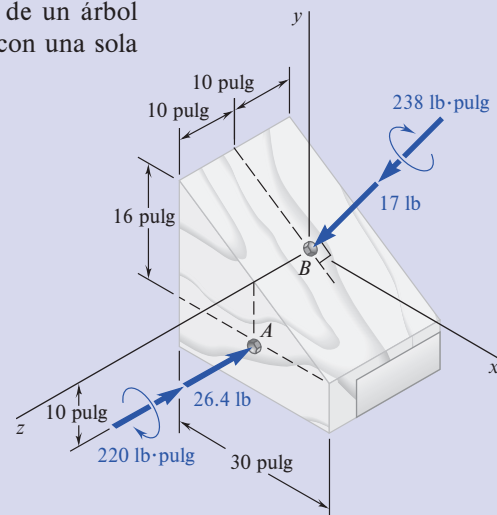


Figura P3.138

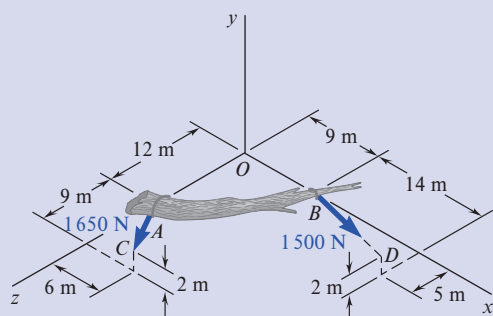


Figura P3.139

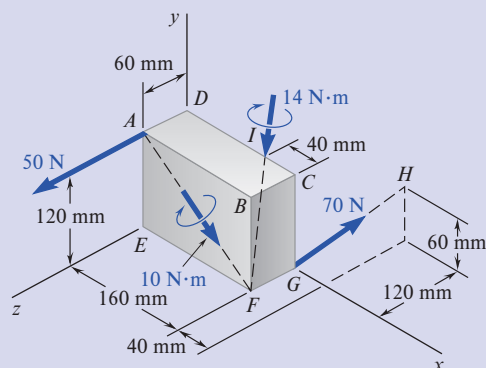


Figura P3.141

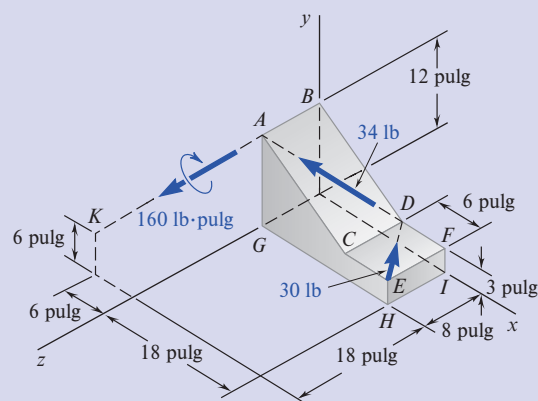


Figura P3.142

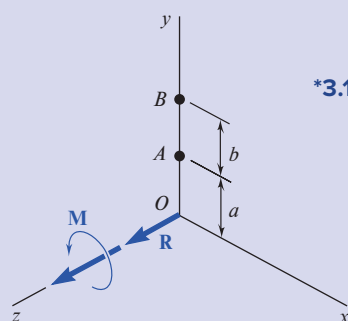


Figura P3.143

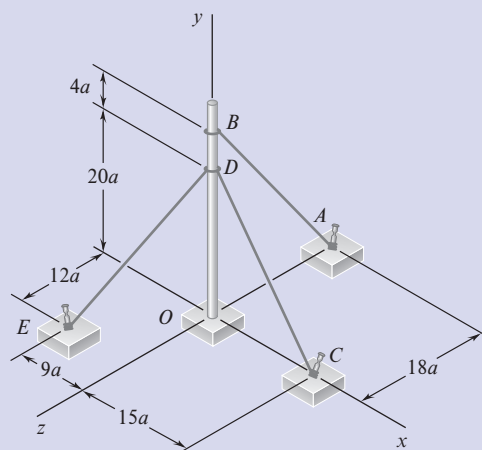


Figura P3.140

llave de torsión equivalente y determine a) la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión, c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano yz .

- *3.140** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables atirantados. Si las tensiones en los cables tienen la misma magnitud P , reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine a) la fuerza resultante $\mathbf{R}$, b) el paso de la llave de torsión, c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca el plano xz .

- *3.141 y *3.142** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente $\mathbf{R}$. Si esto es posible, determine $\mathbf{R}$ y el punto donde la línea de acción de $\mathbf{R}$ interseca el plano yz . Si la reducción no es posible, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca el plano yz .

- *3.143** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura por un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje y aplicadas, respectivamente, en A y en B .

- *3.144** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto dado, mientras que la otra esté contenida en un plano dado.

- *3.145** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales esté aplicada en un punto dado.

- *3.146** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas, una de las cuales tenga una línea de acción predefinida.

Repaso y resumen

Principio de transmisibilidad

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas **externas** e **internas** (sección 3.1A) y se vio que, de acuerdo con el **principio de transmisibilidad**, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (sección 3.1B). En otras palabras, dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$ que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.43). Se dice que dos fuerzas como estas son **equivalentes**.

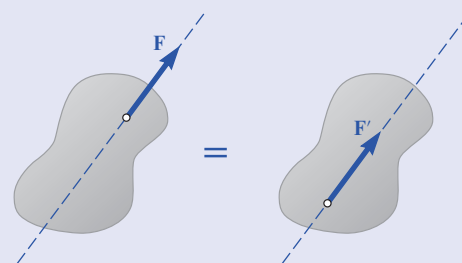


Figura 3.43

Producto vectorial

Antes de proceder con el estudio de **sistemas equivalentes de fuerzas** se presentó el concepto del **producto vectorial de dos vectores** (sección 3.1C). El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{P}$ y a $\mathbf{Q}$ (figura 3.44), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la punta de $\mathbf{V}$ verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector $\mathbf{P}$ colinear con el vector $\mathbf{Q}$ como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{V}$ —considerados en ese orden— forman una **triada de mano derecha**. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos:

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.45): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si estos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si estos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Componentes rectangulares del producto vectorial

Las **componentes rectangulares del producto vectorial** $\mathbf{V}$ de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ fueron expresadas como sigue (sección 3.1D):

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

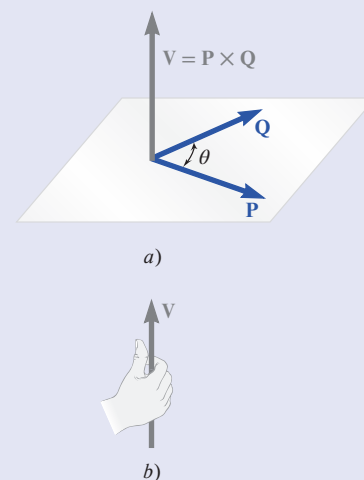


Figura 3.44

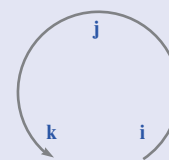


Figura 3.45

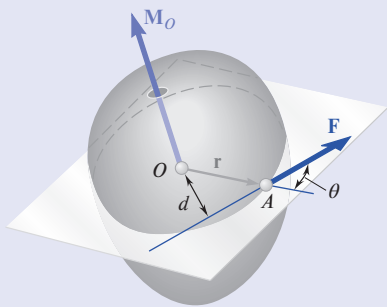


Figura 3.46

También se pueden expresar las componentes de un producto vectorial como un determinante:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Momento de una fuerza con respecto a un punto

El momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un punto O se definió (sección 3.6) como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza $\mathbf{F}$ (figura 3.46). Al representar con θ el ángulo entre las líneas de acción de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$ se encontró que la magnitud del momento de $\mathbf{F}$ con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de $\mathbf{F}$.

Componentes rectangulares del momento

Las componentes rectangulares del momento $\mathbf{M}_O$ de una fuerza $\mathbf{F}$ se expresaron (sección 3.1F) como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde x , y y z son las componentes del vector de posición $\mathbf{r}$ (figura 3.47). Usando una forma de determinante se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

En el caso más general del momento de una fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de problemas que involucren únicamente dos dimensiones se puede suponer que la fuerza $\mathbf{F}$ se encuentra en el plano xy . Su momento $\mathbf{M}_B$ con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.48) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

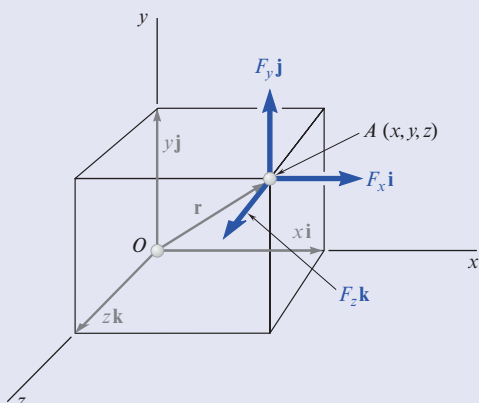


Figura 3.47

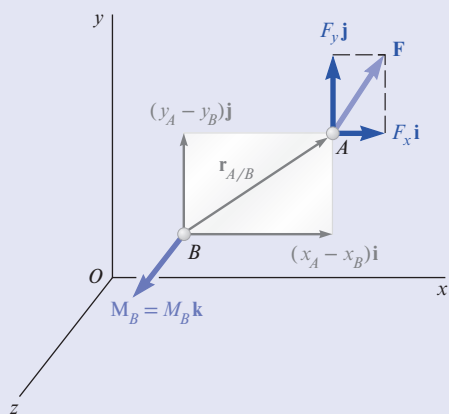


Figura 3.48

En los problemas modelo 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (sección 3.2A) se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (figura 3.49). Se expresó el producto escalar de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en términos de las componentes escalares de los dos vectores y se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.28)$$

Proyección de un vector sobre un eje

La **proyección de un vector $\mathbf{P}$ sobre un eje OL** (figura 3.50) se puede obtener formando el producto escalar de $\mathbf{P}$ y el vector unitario λ a lo largo de OL . Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.34)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.35)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

Triple producto mixto de tres vectores

El **triple producto mixto** de los tres vectores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.36)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de $\mathbf{S}$ con el producto vectorial de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ (sección 3.2B). Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

Momento de una fuerza con respecto a un eje

El **momento de una fuerza $\mathbf{F}$ con respecto a un eje OL** (sección 3.2C) se definió como la proyección OC sobre OL del momento $\mathbf{M}_O$ de la fuerza $\mathbf{F}$ (figura 3.51), esto es, se definió como el triple producto escalar del vector unitario λ , el vector de posición $\mathbf{r}$ y la fuerza $\mathbf{F}$:

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.40)$$

Con el uso de la forma de determinante para el triple producto mixto, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

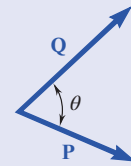


Figura 3.49

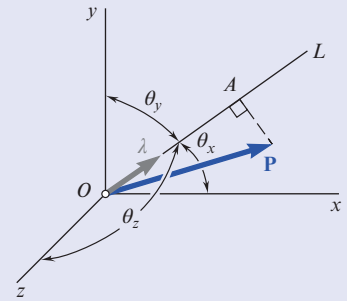


Figura 3.50

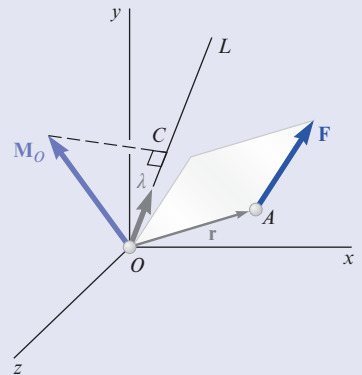


Figura 3.51

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL

x, y, z = componentes de $\mathbf{r}$

F_x, F_y, F_z = componentes de $\mathbf{F}$

En el problema modelo 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Pares

Se dice que dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un **par** (sección 3.3A). Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector $\mathbf{M}$ perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.52).

Dos pares que tienen el mismo momento $\mathbf{M}$ son *equivalentes*, esto es, dichos pares producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado (sección 3.3B). La suma de dos pares también es un par (sección 3.3C), y el momento $\mathbf{M}$ del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ de los pares originales (problema modelo 3.6). Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el **vector de par**, igual en magnitud y dirección al momento $\mathbf{M}$ del par (sección 3.3D). Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.53).

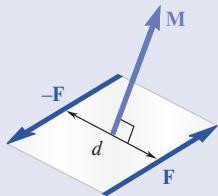


Figura 3.52

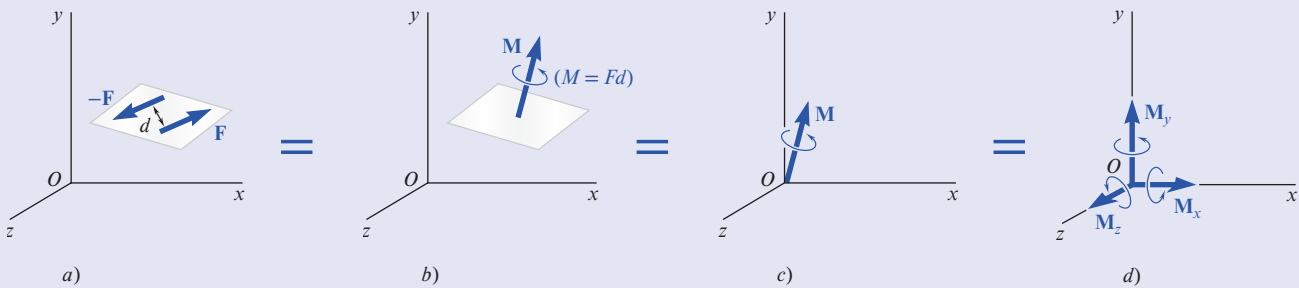


Figura 3.53

Sistema fuerza-par

Cualquier fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un **sistema fuerza-par** en un punto arbitrario O , el cual consta de la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en O y un par de momento $\mathbf{M}_O$, igual al momento de la fuerza $\mathbf{F}$ en su posición original con respecto a O (sección 3.3E); se debe señalar que la fuerza $\mathbf{F}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O$ siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.54).

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Se concluye que (sección 3.4A) *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O* , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.55) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener la fuerza resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par resultante $\mathbf{M}_O^R$ (problemas modelo 3.8, 3.9, 3.10 y 3.11). Obsérvese que, en general, la resultante $\mathbf{R}$ y el vector de par $\mathbf{M}_O^R$ no serán perpendiculares entre sí.

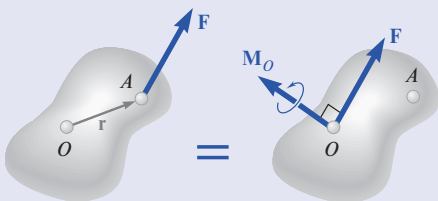


Figura 3.54

Sistemas equivalentes de fuerzas

Con base en lo anterior se concluyó (sección 3.4B) que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas* $F_1, F_2, F_3, \dots$ y $F'_1, F'_2, F'_3, \dots$, *son equivalentes si y solo si*

$$\Sigma F = \Sigma F' \quad \text{y} \quad \Sigma M_O = \Sigma M'_O \quad (3.55)$$

Otras reducciones de un sistema de fuerzas

Si la fuerza resultante R y el vector de par resultante M_O^R son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante (sección 3.4C). Este es el caso para sistemas que están constituidos por *a)* fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b)* fuerzas coplanares (problemas modelo 3.8 y 3.9) o *c)* fuerzas paralelas (problema modelo 3.11). Si la resultante R y el vector de par M_O^R *no* son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Este, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante R y un vector de par M_1 dirigido a lo largo de R (sección 3.4D y problema modelo 3.12).

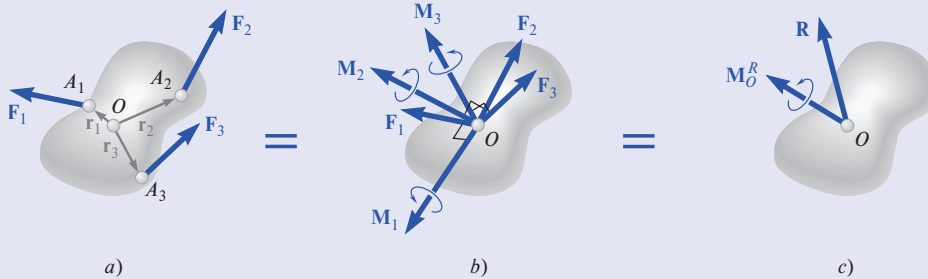


Figura 3.55

Problemas de repaso

3.147 Se aplica una fuerza P de 300 N en el punto A de la palanca angular que se muestra en la figura. *a)* Calcule el momento de la fuerza P alrededor de O descomponiéndola en sus componentes horizontal y vertical. *b)* Con el resultado del inciso *a)*, determine la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de P .

3.148 Con un malacate AB se tensan cables a un poste. Si se sabe que la tensión en el cable BC es de 1 040 N y que la longitud d es de 1.90 m, determine el momento respecto de D de la fuerza ejercida

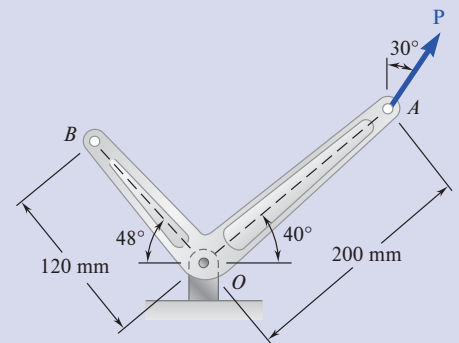


Figura P3.147

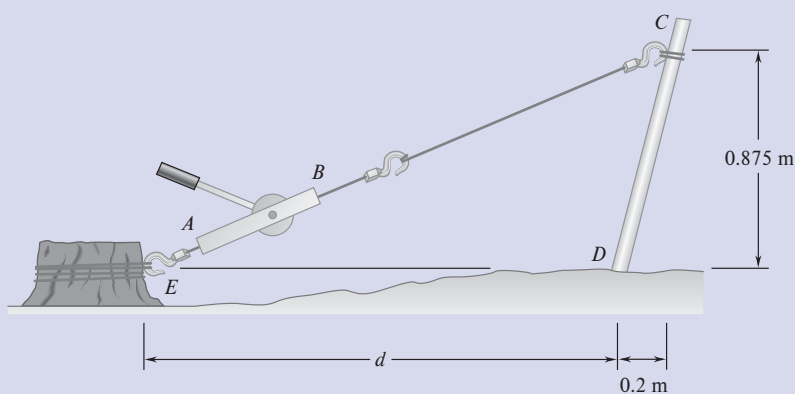


Figura P3.148

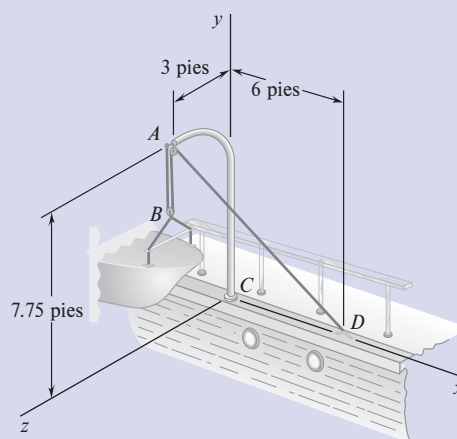


Figura P3.149

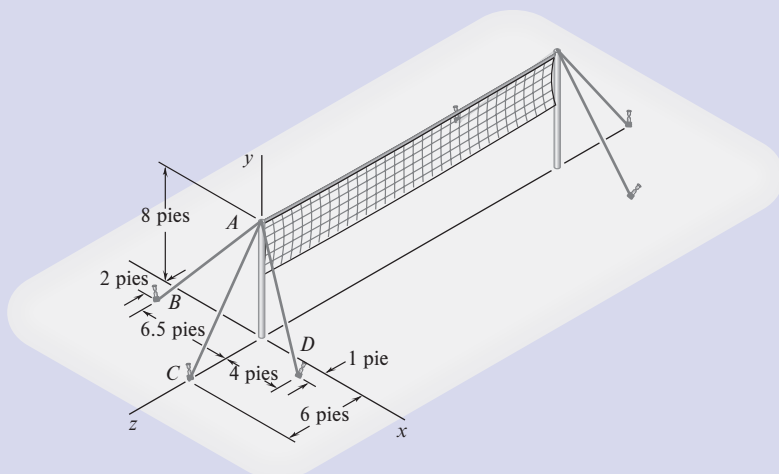


Figura P3.150

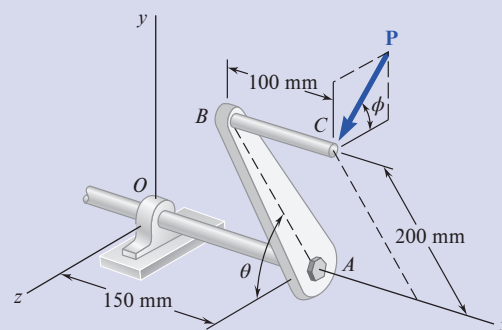


Figura P3.151

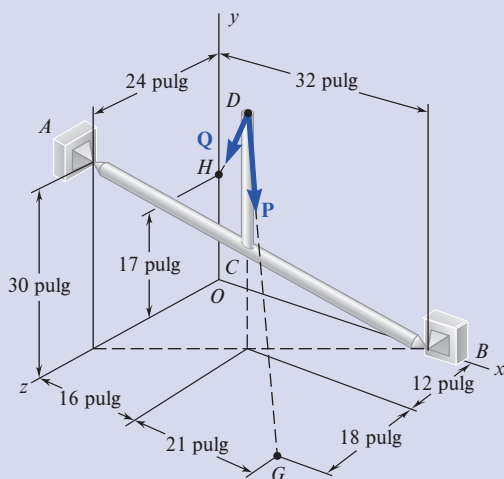


Figura P3.152

por el cable en C . Para ello, descomponga en sus componentes horizontal y vertical esa fuerza aplicada en a) el punto C y b) el punto E .

3.149 Una lancha pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 82 lb. Determine el momento respecto a C de la fuerza resultante $\mathbf{R}_A$ ejercida sobre la grúa en A .

3.150 Determine el ángulo formado por los tirantes AB y AC de la red de voleibol que se muestra en la figura.

3.151 Una sola fuerza $\mathbf{P}$ actúa en C con una dirección perpendicular al mango BC de la manivela que se muestra en la figura. Determine el momento M_x de $\mathbf{P}$ respecto al eje x cuando $\theta = 65^\circ$, si se sabe que $M_y = -15 \text{ N}\cdot\text{m}$ y $M_z = -36 \text{ N}\cdot\text{m}$.

3.152 La varilla vertical CD de 23 pulg está soldada al punto medio C de la varilla AB de 50 pulg. Determine el momento alrededor de AB de la fuerza $\mathbf{Q}$ de 174 lb.

3.153 En una operación de manufactura se taladran tres orificios al mismo tiempo en una pieza de trabajo. Si los orificios son

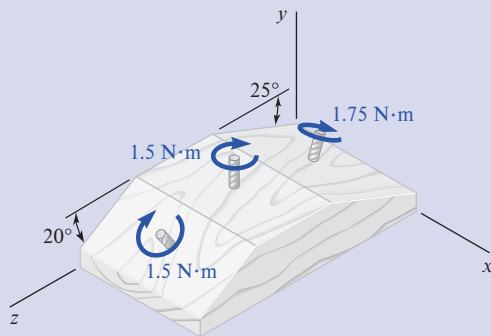


Figura P3.153

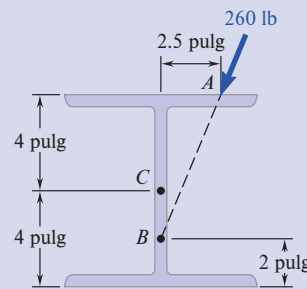


Figura P3.154

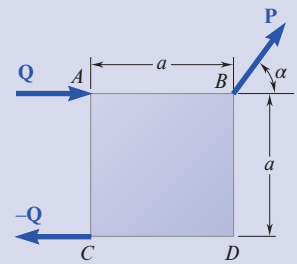


Figura P3.155

perpendiculares a las superficies de la pieza de trabajo, reemplace los pares aplicados a los taladros por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

- 3.154** Se aplica una fuerza de 260 lb en A sobre la sección de acero laminado que se muestra en la figura. Reemplace esa fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el centro C de la sección.
- 3.155** La fuerza y el par que se muestran en la figura se reemplazan por una sola fuerza equivalente. Si se sabe que $P = 2Q$, determine el valor requerido de α si la línea de acción de la fuerza única equivalente pasa a través de a) el punto A , b) el punto C .
- 3.156** Se aplican una fuerza $\mathbf{F}_1$ de 77 N y un par $\mathbf{M}_1$ de 31 N·m en la esquina E de la placa doblada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{M}_1$ deben reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{F}_2$, $\mathbf{M}_2$) en la esquina B , y si $(M_2)_z = 0$, determine a) la distancia d , b) $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{M}_2$.

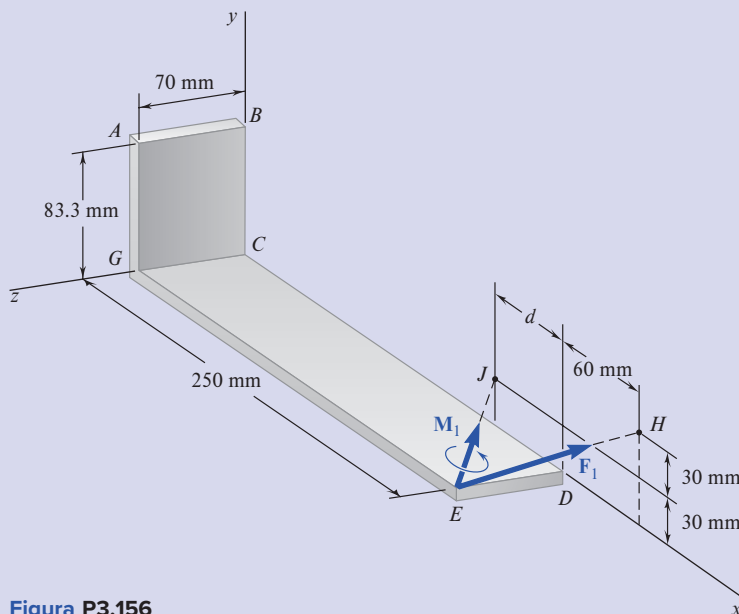


Figura P3.156

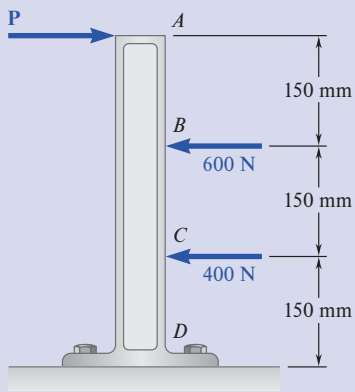


Figura P3.157

3.157 Se aplican tres fuerzas horizontales a un brazo vertical de hierro fundido como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas y la distancia desde el suelo hasta su línea de acción cuando a) $P = 200$ N, b) $P = 2\,400$ N, c) $P = 1\,000$ N.

3.158 Al usar un sacapuntas manual un estudiante ejerce sobre este las fuerzas y el par que se muestran en la figura. a) Determine las fuerzas ejercidas en B y C si se sabe que las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (2.6 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (0.7 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.0 \text{ lb}\cdot\text{pie})\mathbf{j} - (0.72 \text{ lb}\cdot\text{pie})\mathbf{k}$. b) Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x .

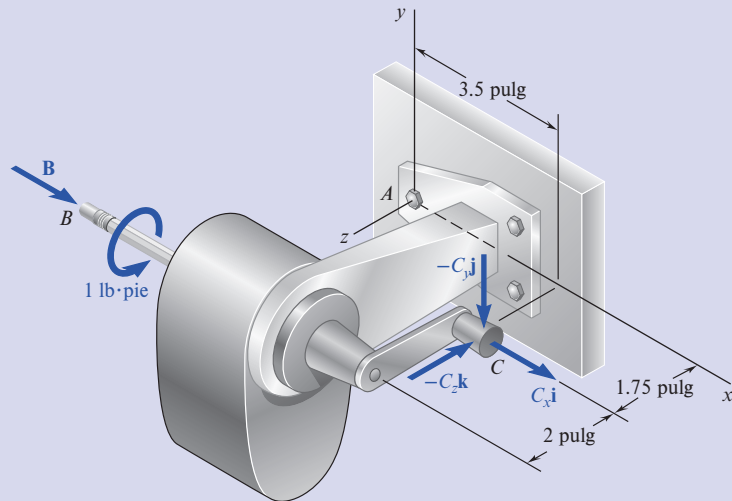


Figura P3.158